RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Primaria - ONE 2013
Pruebas de 3° y 6° año de la Educación Primaria

ONE 2013

Presidencia de la Nación
Ministerio de Educación

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Primaria - ONE 2013

Pruebas de 3° y 6° año de la Educación Primaria

ONE 2013

Departamento de Evaluación de la Calidad Educativa:

Coordinación:
Mg. Mariela Leones

Elaborado por:

Equipo del Área de Matemática:
Prof. Liliana Bronzina
Prof. Pilar Varela
Lic. Nora Burelli
Prof. Sabrina Crichigno
Lic. Valeria Capasso

Asistencia Técnico-Pedagógica:
Prof. Natalia Rivas

Área de Procesamiento de la Información:
Ing. Graciela Baruzzi

Lectura Crítica y Aportes:
Prof. Verónica Grimaldi

Este documento se terminó de elaborar en octubre de 2014

Diseño y Diagramación:
Karina Actis
Juan Pablo Rodriguez
Coralia Vignau

ÍNDICE

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA- EDUCACIÓN PRIMARIA -ONE 2013. PRUEBAS DE 3º AÑO Y 6º AÑO PRIMARIA

MATEMÁTICA

Las pruebas de matemática evaluaron en el 2013 una muestra de estudiantes que cursaban el 3° o 6° año de ese nivel.

Las mismas tuvieron como finalidad determinar el rendimiento de los alumnos de diferentes jurisdicciones en relación con algunos contenidos del área.

Es importante considerar que son pruebas masivas, es decir, se aplican a muestras muy grandes de alumnos y que, por lo tanto, tienen una estructura que les es propia. Un análisis puntual de las mismas puede complementar la información obtenida de las evaluaciones realizadas día a día por los docentes en su trabajo de aula.

¿Cómo estuvieron constituidas las pruebas?

Las pruebas estuvieron constituidas por 30 ítems cerrados o de opción múltiple, con cuatro opciones de respuesta cada uno, y tres ítems de respuesta abierta a desarrollar. Cada alumno debía responder las 33 preguntas.

La inclusión de ítems de respuesta abierta permitió evaluar los procesos que los alumnos desarrollaron para dar cuenta de un procedimiento o de una estrategia de resolución elegida y de su relación con la respuesta presentada.

Con el fin de atender especialmente al procedimiento de resolución y no solo al resultado, los ítems de respuesta abierta fueron corregidos por docentes debidamente capacitados. Para garantizar la objetividad en la corrección, los docentes utilizaron una guía elaborada para tal fin por el equipo pedagógico de la DINIECE, y de esta manera, clasificaron las respuestas en cuatro categorías contempladas en la grilla de corrección: correcta, parcialmente correcta, incorrecta y en blanco (omitida).

Habiendo accedido a las respuestas dadas por los alumnos, hemos seleccionado algunas que por sus características, nos invitan a reflexionar no sólo sobre su nivel de conceptualización, sino también sobre sus posibilidades concretas de resolución en diferentes temas.

En el caso de los ítems abiertos nos aportan, además, una variedad de datos acerca de los recursos que los alumnos están en condiciones de utilizar en esta etapa de su escolaridad primaria para describir los procedimientos utilizados en la resolución y la racionalidad desplegada, cuestión que aunque resulte compleja para los niños por estar vinculada a lo meta cognitivo, da cuenta del tipo de trabajo matemático realizado en su trayectoria escolar.

Por ello, este informe tiene como propósito compartir con ustedes algunos de los procedimientos utilizados por los alumnos para resolver las actividades evaluadas tuvieron que resolver y una serie de comentarios y análisis realizados sobre los conocimientos y los procesos cognitivos que están en la base de los mismos.

Asimismo, aunque los fines y las características de esta prueba difieren en gran medida de los utilizados cotidianamente en las aulas, no dudamos puedan aportar información útil sobre las dificultades y logros más frecuentes que pueden presentar los alumnos, y al mismo tiempo, proveer algunas sugerencias para trabajar en clase, con el fin de enriquecer la tarea pedagógica, pudiendo ser adaptadas por los docentes a su contexto y a la realidad de sus alumnos y de su escuela.

Los niveles de desempeño

El desempeño de los alumnos en matemática se agrupó en tres niveles para cada año evaluado: alto, medio y bajo.

Los mismos se han determinado a partir de criterios empíricos y pedagógicos, en relación con los rendimientos de los alumnos en la prueba. Cada uno de los niveles es inclusivo en relación con el inmediatamente inferior, es decir, en la medida en que un alumno está ubicado en un determinado nivel, tiene alta probabilidad de resolver con éxito las actividades del mismo y las de los niveles inferiores a aquél.

De este modo, la discriminación de estos niveles facilita la comunicación de lo que los alumnos saben y pueden hacer.

A continuación analizaremos problemas que corresponden a los distintos niveles de desempeño de los alumnos del tercer y sexto año de su escolaridad de 2013

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES EVALUADAS

Presentaremos a continuación, algunas de las actividades abiertas, como así también una selección de resoluciones analizadas, correspondientes a 3° y 6° año de Educación Primaria.

Nos detendremos en algunas respuestas que, por sus características, nos permiten construir hipótesis sobre el estado de saber de los estudiantes. Para ello consideramos valioso incluir no solo respuestas correctas, sino especialmente aquellas que, siendo erróneas, nos aportan información sobre posibles modos de hacer y pensar la matemática que los alumnos evaluados pudieran haber construido en su trayectoria escolar.

Partimos de una concepción que destaca que lo esencial en el aprendizaje de la matemática es construir el sentido de los conocimientos y que la resolución de problemas es una actividad ineludible para ello. En este sentido, nuestra mirada no se enfocará sólo en los resultados, sino también en los procesos puestos en juego por los alumnos para abordar las propuestas presentadas.

Consideramos, junto a J. P. Astolfi que

> *"(…) los errores no se consideran faltas condenables ni fallos de programa lamentables: son síntomas interesantes de los obstáculos con los que se enfrenta el pensamiento de los alumnos"*[1].

Por ello, nos detendremos en procedimientos erróneos o no, que nos ofrezcan indicadores, no solo de conocimientos que los alumnos pudieran poner en juego para resolver, sino también de los procesos cognitivos que los respalden. Como afirma Charlot

> *"(…) la actividad matemática no es simplemente buscar la respuesta correcta. Es también la elaboración de hipótesis, de conjeturas que son confrontadas con otras y testeadas en la resolución del problema. (…) Un concepto matemático se construye articulado con otros conceptos, a través de una serie de rectificaciones y de generalizaciones que se hacen necesarias para su utilización en un campo de problemas de la misma familia."* [2]

Con estos elementos, y considerando ineludible el vínculo entre aprendizaje y enseñanza de la matemática, formularemos algunas hipótesis que nos permitan volver a pensar las prácticas, para posibilitar avances en la construcción de conocimientos matemáticos.

---

[1] *Astolfi, Jean Pierre (2004) "El "error", un medio para enseñar", Díada/SEP Biblioteca para la actualización del Magisterio , México.*

[2] *Charlot, Bernard. (1986)"La epistemología implícitaen las prácticas de enseñanza de las matemáticas", versión mimeografiada de la conferencia pronunciada en Cannes.*

SEXTO AÑO

PROBLEMA SOBRE NÚMEROS

Los alumnos de 6° año de la Educación Primaria tuvieron que resolver esta actividad que consistía en encontrar los números ubicados erróneamente en la siguiente lista, formada por números naturales, expresiones decimales y fracciones.

2 En esta lista de números, ordenada de menor a mayor, hay dos números mal ubicados. Señalá cuáles son y explicá por qué están mal ubicados.

0,5	0,08	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	2	2,05

Contenido:	Números y Operaciones
Capacidad:	Reconocimiento de conceptos
Desempeño:	Comparar cantidades y números tanto Naturales como expresiones fraccionarias y decimales más usuales.

Suele suceder que algunos niños sobre generalizan algunos conocimientos válidos en el campo de los números naturales, donde a mayor cantidad de cifras, el número es mayor, y resulta evidente la ruptura que se plantea para el caso de las expresiones decimales, donde los números pueden ser más “largos” pero más “pequeños”. Para poner en duda este concepto, los niños deben descubrir y analizar el funcionamiento y la importancia del valor de las cifras según su posición en las expresiones decimales.

Si comparamos 0,5 y 0,08 representándolos como sumas de potencias de 10, podríamos comprobar que 0,5 equivale a sumar 5 veces 0,1 (un décimo), a diferencia de 0,08, que equivale a sumar 8 veces 0,01 (un centésimo). Debido al trabajo sostenido con los números naturales durante la mayor parte de su escolaridad primaria, algunos niños podrían llegar a mantener la idea de que “al sumar 8 veces, se obtiene más que al sumar 5 veces”.

Pero dentro del campo numérico al que pertenecen las expresiones decimales, es necesario que los alumnos analicen el valor posicional de cada cifra a la derecha de la coma según su posición relativa, lo que nos indica si estamos hablando de décimos, centésimos o milésimos, y que cada uno de estos lugares indica que la cifra representa un valor 10 veces más pequeño que el valor a su izquierda, lo cual permite explicar por qué un número del orden de los décimos es mayor que el otro del orden de los centésimos.

Para pensar en la relación entre 1, 1 ½ y 1 ¼, es necesario que durante el segundo ciclo los niños elaboren algunos conocimientos diferentes de los estudiados con anterioridad, donde pudieron haberse enfrentado con problemas que involucran tanto el estudio de los naturales cuanto el de fracciones de uso corriente como ½ y ¼ en contextos de uso diario como el de la medida, de modo tal que reelaboren aquello que han construido sobre cada uno de estos campos numéricos, y avancen para centrarse en la relación entre la parte fraccionaria de estas escrituras mixtas, dado que estos tres números comparten la misma parte entera.

Sabemos que por una sobregeneralización de lo elaborado en torno al ordenamiento de naturales, pueden pensar que 1/4 es mayor que 1/2, porque 4 es más grande que 2. Por ello, se requiere de múltiples y variados abordajes en el segundo ciclo, recuperando los diferentes significados de las fracciones, de modo de establecer sus características y propiedades.

Para resolver esta actividad es posible que los alumnos realicen dibujos o esquemas como punto de apoyo, comparen fracciones buscando equivalencias, apelen a la relación doble y mitad, se apoyen en las expresiones decimales que las representan, busquen su proximidad al cero para hallar la fracción menor o, por complemento, comparen cuánto le falta a cada fracción para llegar al próximo entero; también, que utilicen la representación en la recta numérica.

Claro que apoyarse en la búsqueda de equivalencias como recurso para ordenar expresiones, implica –como decíamos- haber ampliado el alcance de los conocimientos vinculados con el valor posicional al campo de los decimales, habiendo reestructurado los conocimientos para las cifras “a la derecha de la coma”.

Los recursos que utilice y el análisis que cada niño efectúe, dependerán en gran parte del trabajo áulico realizado y de las estrategias que se hayan puesto en juego día a día en cada clase.

A continuación, analizaremos algunas respuestas de los alumnos con el objetivo de mostrar aquellas que resultaron correctas y otras que dan cuenta de errores comunes en el ordenamiento o en las justificaciones, y que ponen en evidencia algunas concepciones acerca del campo numérico de los racionales.

De una muestra de 16827 alumnos el 8,9 % encontró más de un número que está mal ubicado y dio alguna explicación al respecto.

Ejemplo 1

0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

los dos que estan mal ubicados son 0,5 y 1 1/4
porque 0,5 representa 0,50 y 50 es mayor que 8
y 1 1/4 también está mal porque 1/4 es menor que
1/2 entonces si es de menor a mayor tiene que es-
tar antes de 1 1/2

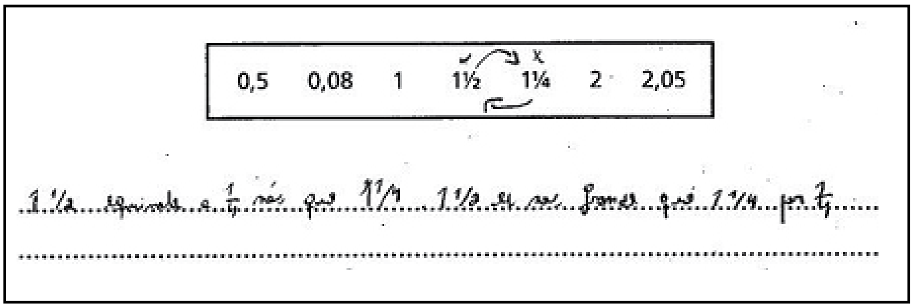
Ejemplo 2

0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

Porque 0,5 es mas grande que 0,08
Porque 1½ es mas grande que 1¼.

De una muestra de 16827 de los alumnos de 6° año de Educación Primaria el 37,8 % encontró por lo menos uno de los números mal ubicados, brindando una justificación para su respuesta.

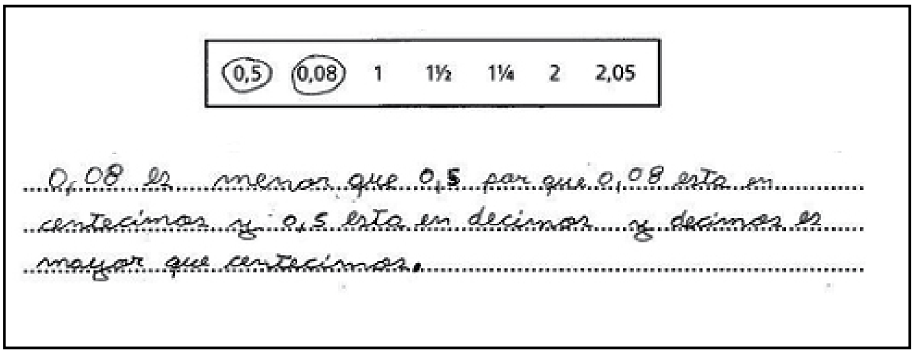
Ejemplo 3


0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

1 ½ equivale a ¼ más que 1 ¼ 1 ½ es más grande que 1 ¼ por ¼

Rta: 1 ½ equivale a ¼ más que 1 ¼. 1 ½ es más grande que 1 ¼ por un 1/4

Ejemplo 4

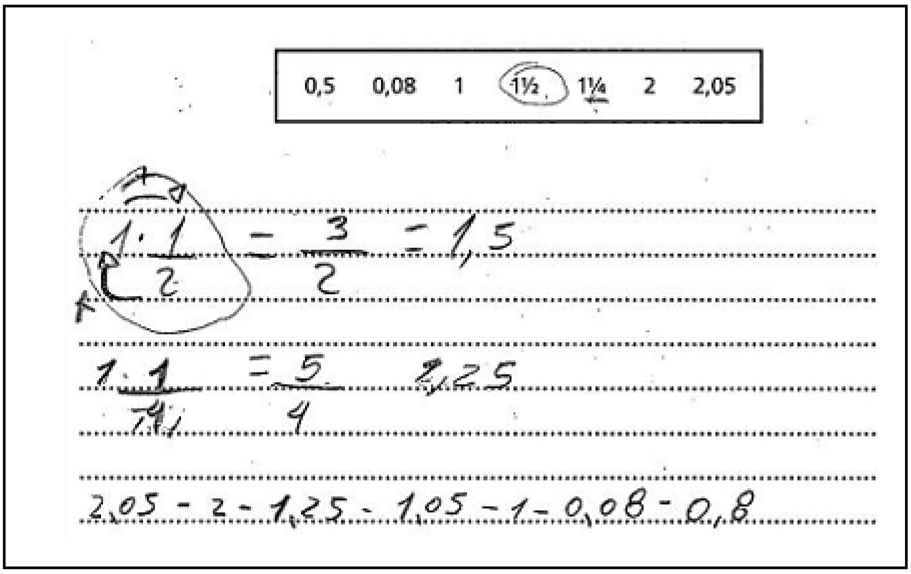

0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

0,08 es menor que 0,5 por que 0,08 esta en centecimos y 0,5 esta en decimos y decimos es mayor que centecimos.

Vemos otro ejemplo en el que advirtieron el orden erróneo únicamente en las expresiones decimales.

En otro grupo de respuestas, los alumnos transformaron las escrituras mixtas en decimales, como recurso para luego reordenar la lista dada.

Ejemplo 5



0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

$1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 1,25

2,05 - 2 - 1,25 - 1,05 - 1 - 0,08 - 0,8

Respuesta:

$$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$2,05 - 2 - 1,25 - 1,05 - 1 - 0,08 - 0,8$$

En el ejemplo anterior, el alumno cambió el orden transformando la lista en decreciente, pero encontró alguna dificultad al analizar el valor posicional que presenta cada cifra en 0,5 y 0,08, lo que nos indica si estamos hablando de décimos o centésimos.

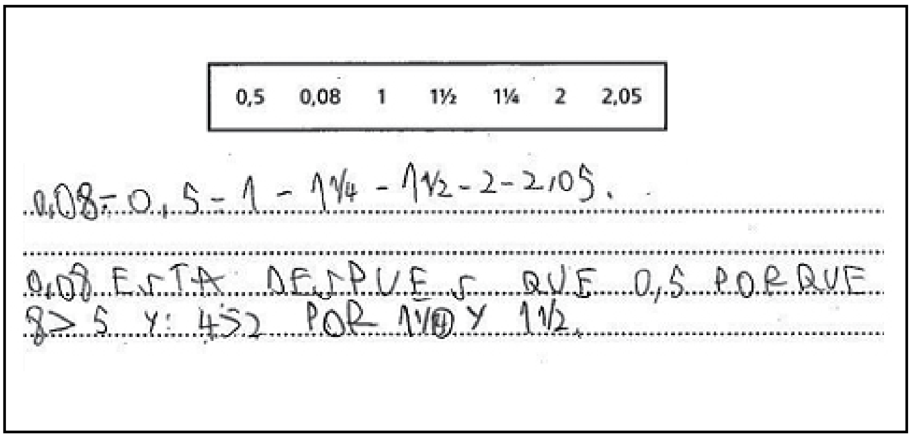
Este caso parece fundarse en la concepción de que los números decimales son dos enteros separados por una coma, tratando cada parte por separado.

> *"Desde la perspectiva infantil, la coma separa dos números y, frente a ellos, utilizan lo que saben. Parecieran estar sosteniendo, implícitamente que "si son números, vale para ellos todo lo que sabemos que les ocurre a los números que conocemos, los naturales."*[3]

De este modo, tal concepción pudo haberlo llevado a alterar el orden y confundir en la escritura a 0,5 con 0,8 y, tomando como base 0,08 y 0,8, centrarse en la comparación de la parte decimal del número planteándose que, al igual que con los naturales, tres cifras hacen más grande al número que dos cifras.

También podemos tener en cuenta que en lugar de considerar 1,5, escribió 1,05. Quizás en un intento de que todos los decimales tuvieran la misma cantidad de cifras.

Ejemplo 6



Respuesta

$$0,08-0,5-1-1\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}-2-2,05$$

$$0,08 \ \textit{está después que}\ 0,5 \ \textit{porque}\ 8>5 \text{ y } 4>2 \ \textit{por}\ 1\frac{1}{4}\ \textit{y}\ 1\frac{1}{2}$$

[3] *Quaranta, M. E.; Tarasow, P. y Becerril, M "Notaciones decimales: conceptualizaciones infantiles a propósito de la resolución de problemas en el contexto del dinero y de las medidas de longitud" en Broitman, C. (comp.) (2013) Matemáticas en la escuela primaria I, Bs. As., Editorial Paidós.*

En el ejemplo anterior, el estudiante ordenó correctamente todos los números, pero al intentar justificar, realizó en primer lugar un análisis cifra por cifra, planteando por ejemplo frente al par de números 0,08 y 0,5 que "8 va después de 5 porque es mayor que 5", utilizando reglas que son válidas para comparar números naturales, sin advertir que el número será mayor o menor según la posición que ocupen las cifras 5 y 8.

Este alumno operó del mismo modo con 1 ¼ y 1 ½, señalando que 4 es mayor que 2. Por esto, la explicación se presenta como contradiciendo la resolución desplegada.

En esta respuesta se observa que el estudiante ordenó de forma creciente los números dados, pero al justificar no queda en claro cuál fue su intención. A primera vista podemos pensar que está mal justificado ya que "0,08 no está después de 0,5" y que si bien "4 es mayor que 2", ¼ no es mayor a ½.

Aquí podríamos pensar que recurre a las propiedades de los números naturales para la justificación, quizás por este trabajo sostenido en el campo numérico de los naturales, referido al principio.

Resultaría muy riesgoso, en el contexto de una evaluación masiva de estas características, y sin una instancia de discusión grupal o de intercambio posterior a su producción escrita, establecer cuál fue el criterio que orientó esta respuesta. Solo nos limitamos a enunciar posibles hipótesis, que nos permitan pensar cómo se podrían retomar en clase estas cuestiones para propiciar avances en la conceptualización.

Respuestas incorrectas

Veamos ahora algunas de las respuestas erróneas, que alcanzaron un 52,2 % de una muestra de 16827 alumnos.

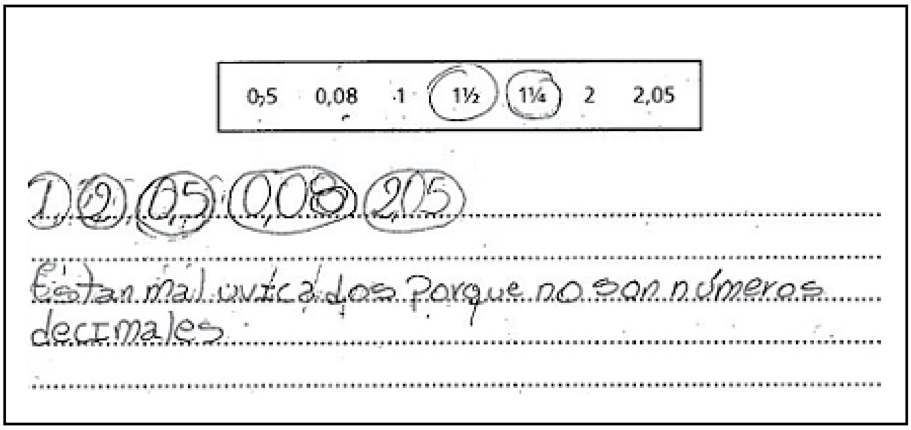
Ejemplo 7

Algunos alumnos, al ordenar fracciones, decimales, expresiones mixtas y naturales, los tratan como si fueran números diferentes.

Es posible que esto responda a una dificultad que ofrece el estudio de los racionales, donde la idea de que los números admiten diferentes representaciones resulta una ruptura frente a la unicidad de expresión entre los naturales.

El siguiente ejemplo muestra una concepción en la que el alumno sostiene que hay que "sacar las fracciones" porque no pueden ordenarse en ese conjunto de números dado.

No expresa ninguna idea que nos dé la pauta de cómo concibe la expresión decimal de las fracciones ni de si reconoce que 1 ¼ es menor que 1 ½. Por otra parte, pareciera plantear el ordenamiento colocando a los naturales primero, y agrupar los decimales aparte, separadamente, ordenando por un lado los naturales, por otro lado los decimales, y excluyendo las expresiones que contienen fracciones, tal vez por no considerarlas números.

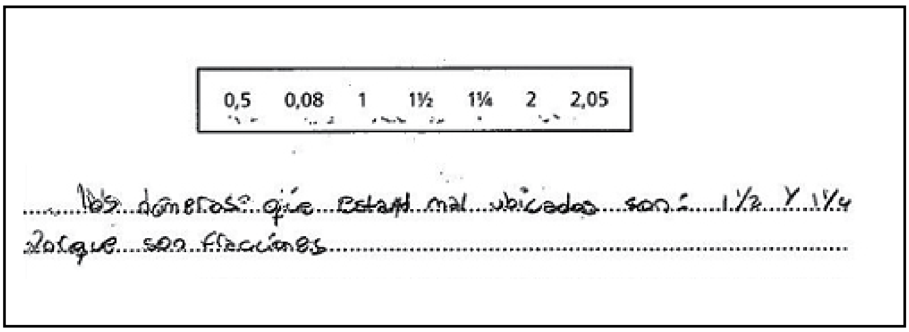

0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

1, 2, 0,5, 0,08, 2,05

Estan mal uvicados porque no son números decimales

En el siguiente ejemplo, ocurre algo similar pero con fracciones.

Ejemplo 8


0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

los números que estan mal ubicados son: 1½ y 1¼ porque son fracciones

Respuesta: Los números que están mal ubicados son: 1 ½ y 1 ¼ porque son fracciones.

¿Por qué este alumno no considera a las fracciones como integrantes de una lista factible de ser ordenada?

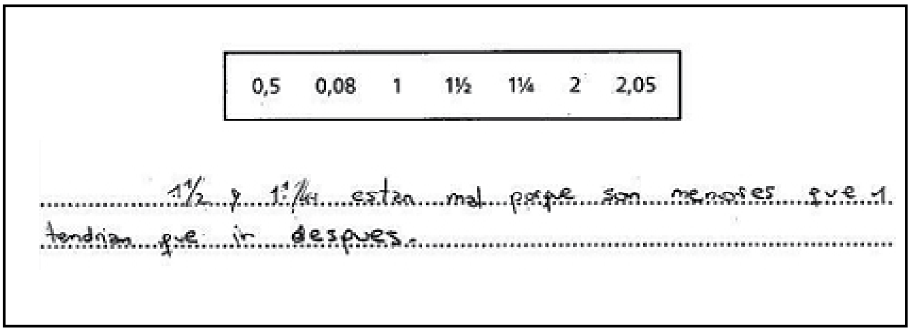
Los alumnos ya han trabajado con números naturales, los han ordenado, han operado con ellos, han resuelto problemas en que estos números han sido datos, los han usado para expresar cantidades, etc. En el segundo ciclo amplían su estudio sobre las fracciones. Como sostienen Héctor Ponce y María Emilia Quaranta

> *"(…) para que las fracciones tomen status de número será necesario que los niños puedan hacer con ellas lo mismo que pueden hacer con los números conocidos hasta ese momento"*[4].

Esto requiere de un trabajo que tome las semejanzas y diferencias entre naturales y racionales y las posibles generalizaciones que los alumnos produzcan sobre este nuevo conjunto de números aquello que hayan aprendido sobre los naturales. Por lo tanto, es un desafío del docente ayudar a los niños a avanzar en la construcción de estos nuevos conocimientos.

Ejemplo 9

Este alumno considera que 1 ½ y 1 ¼ son menores que 1. Es probable que sólo se haya centrado en la escritura de ½ y ¼ al contestar, o que toda su experiencia sea en torno a fracciones menores que el entero. Quizás porque parecen ser más fácilmente representables mediante dibujos, muchas propuestas de enseñanza se configuran alrededor de esas fracciones solamente y por ello, este niño no haya tenido oportunidad de trabajar con expresiones mixtas.

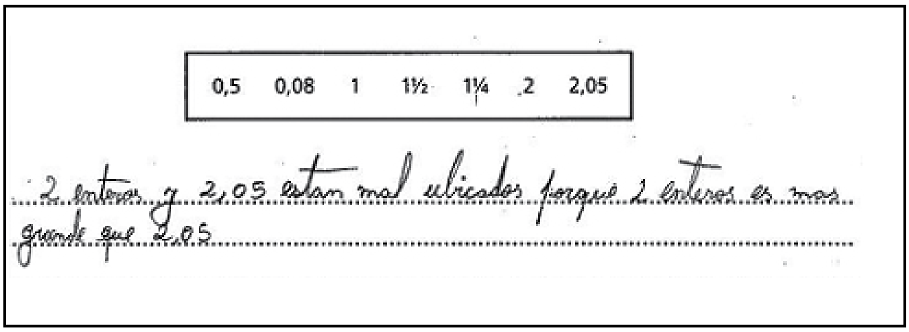

0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

1½ y 1¼ estan mal porque son menores que 1.
tendrian que ir despues.

[4] *Ponce, Héctor y Quaranta, María Emilia, (2006) "Las fracciones" en Enseñar matemática en la escuela primaria, Buenos Aires, Ediciones Tinta Fresca.*

Ejemplo 10

Otro tipo de error es el de los estudiantes que creen que son otros los números mal ubicados.



Respuesta: "2 enteros y 2,05 están mal ubicados porque 2 enteros es más grande que 2,05"

Es posible que estos alumnos no hayan tenido experiencias ricas y variadas que les permitieran avanzar en el análisis de las diferentes notaciones numéricas

> *"(…) la falta de comprensión o dominio sobre el valor posicional en las cifras hace que los niños otorguen mayor peso a la información que tienen de los números simples, lo que los lleva a estimaciones incorrectas entre dos cantidades. Así, más que privilegiar alguna cifra en particular (…) cuando evalúan un enunciado numérico decimal, lo fragmentan en dos y evalúan el conjunto atendiendo solo al numeral que les resulta, para cada caso, el más prominente."*[5]

[5] *Alvarado, Mónica. (2013) "Representaciones notacionales decimales tempranas de números racionales en contexto de medición de peso" en Broitman, C. (comp.) Matemáticas en la escuela primaria I, Bs. As., Editorial Paidós.*

Ejemplo 11

En el siguiente caso, un alumno planteó que la lista está bien ordenada.

0,5 0,08 1 1½ 1¼ 2 2,05

En está línea de numeros ningun número está mal ubicado

Podemos preguntarnos si este alumno consideraría que el orden presentado es correcto porque va desagregando las cifras de cada número, y realizando un análisis parcial, que considera una variable a la vez (0,08 mayor que 0,5 porque 8 es mayor que 5, y luego 1 es mayor que 0,08 y 0,5 porque tiene 1 entero, y luego 1 ¼ es mayor que 1 ½ porque 4 es mayor que 2 y así sucesivamente). No nos ha presentado explicaciones que corroboren hipótesis alguna.

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

El trabajo sobre propuestas de geometría da la posibilidad a los alumnos de conocer un modo de pensar que no encontrarán fuera de la escuela. Los problemas relacionados con contenidos geométricos tal vez son los menos ofrecidos en las aulas.

En palabras de Broitman e Itzcovich

> *"Una de las razones principales por las cuales es importante la enseñanza de la geometría es porque la escuela es también un lugar de creación y transmisión de la cultura. Y la geometría forma parte de ella (…) Estamos concibiendo "transmitir la cultura" con un sentido diferente: los recortes del saber cultural geométrico pueden ser adquiridos por los alumnos en el marco de un trabajo intelectual matemático de resolución y análisis de problemas, de debate y argumentación acerca de estos…"*[6]

Esto implica abordar tanto los contenidos propios de la geometría cuanto su racionalidad, ya que al estudiar Matemática en la escuela ambos resultan tan importantes como los vinculados con números.

Dado que no es habitual en las aulas, consideramos necesaria su inclusión.

> *"(…) la adquisición de un tipo de actividad intelectual propia de la construcción de conocimientos matemáticos es, desde nuestro punto de vista, una condición indispensable para acceder a la cultura matemática. Si esto no es considerado como parte de la enseñanza, se corre el riesgo de transmitir únicamente los resultados."*[7]

Consideramos que los autores se refieren no solo al escaso lugar que tiene la enseñanza de la geometría en las aulas, sino también sobre los modos de producción y de validación de conocimientos que tiene lugar en ellas.

La enseñanza de la Geometría en el Segundo Ciclo deberá entonces trascender las propuestas que solo apelan a lo perceptivo y a la memorización de clasificaciones, y en cambio habrá de favorecer la resolución de problemas geométricos que pongan en juego los modos propios de actividad matemática: explorar posibles resoluciones, elaborar conjeturas y ponerlas a prueba, elaborar argumentos que apelen a propiedades de las figuras más allá del dibujo particular que se utilice para representarlas.

---

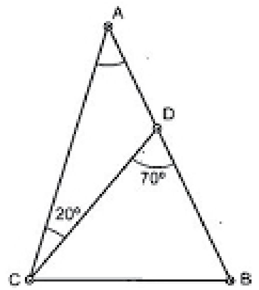
[6] *Broitman, C., Itzcovich, H., (2003) "Geometría en los primeros años de las EGB: problemas de su enseñanza," en Panizza, M. (comp): Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas, Buenos Aires, Paidós.*

[7] *Broitman, C., Itzcovich, H., (op.cit.)*

PPROBLEMA SOBRE EL CÁLCULO DE LA MEDIDA DE UN ÁNGULO

Los alumnos de 6° año de escolaridad primaria resolvieron una actividad que requiere analizar la figura que se presenta a continuación.

Se sabe que los segmentos CD y CB tienen la misma medida y que los ángulos CDB = 70° y ACD = 20°. Calculá la medida del ángulo A.
Explicá cómo lo pensaste



Contenido:	Geometría y Medida
Capacidad:	Resolución de problemas
Desempeño:	Resolver problemas que requieran usar las propiedades de los ángulos y/o los lados de un triángulo.

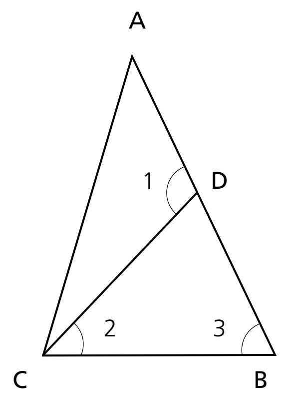
Esta actividad propone averiguar el valor del ángulo A. No se proveyeron instrumentos de medición, por cuanto se busca favorecer procedimientos de resolución que no apelen a su uso.

Se presenta una figura de análisis[8] con la finalidad de que el alumno se apoye en las propiedades que de ella pueden inferirse. Por lo tanto, el ángulo A no necesariamente debe tener en el dibujo una amplitud de 50°.

[6] *Deseamos diferenciar una figura de un dibujo. Una figura es un objeto geométrico, ideal, que se puede representar mediante un dibujo. Su nivel de precisión dependerá del objetivo que se persiga con su trazado. En aquellos casos en que nos proponemos estudiar algunas de las propiedades de una figura geométrica, podemos utilizar un dibujo, que ayude a "representar" algunas relaciones y propiedades que, por ejemplo, se plantean en el enunciado de un problema. A este dibujo lo llamamos figura de análisis. En otros momentos, apelamos a realizar construcciones geométricas, que son otro tipo de dibujo, y que requieren del uso de instrumentos específicos, para "hacer funcionar" determinadas propiedades de las figuras, con el objeto de generar un trabajo reflexivo que dé sentido a esas propiedades para los alumnos.*

Esto requiere tener en cuenta los datos ofrecidos para relacionarlos con conocimientos vinculados con propiedades de los lados y de los ángulos de dos triángulos que forman la figura de análisis, el $C\hat{A}B$ y el $C\hat{D}B$, y con ello calcular el valor del ángulo.

Para desarrollar posibles procedimientos de resolución, nombraremos con 1, 2 y 3 a los ángulos presentados en la siguiente figura de análisis.



Este problema admite por lo menos dos procedimientos de resolución: uno de ellos plantea analizar una composición formada por los dos triángulos, uno de los cuales es isósceles. De este modo, es posible resolverlo centrándose en el análisis de elementos y propiedades de cada triángulo en particular, y de las relaciones entre elementos de ambos, tales como su lado en común y sus ángulos consecutivos. Además un par de ellos, resultan ser adyacentes.

En el triángulo CDB los lados $\overline{CD}$ y $\overline{CB}$ son iguales. Entonces, los ángulos D y B tienen la misma medida: 70°, ya que en un triángulo isósceles los ángulos que se oponen a lados iguales son congruentes. El otro triángulo, ACB, es escaleno y sabemos que su ángulo C= 20°.

Dado que la suma de los ángulos interiores del triángulo CDB es 180°, y D=B (entre los dos miden 140°), el valor del ángulo 2 puede obtenerse realizando 180° - 140°= 40°. Si a ello le sumamos el valor del ángulo C (perteneciente al triángulo CAD), haciendo 20° + 40°, obtenemos que la suma de los ángulos 2 y C es igual a 60°.

Luego de establecer estos valores, y centrándonos en el triángulo ACB podemos calcular.

$\hat{A}$= 180° – (60° + 70°) = 50°.

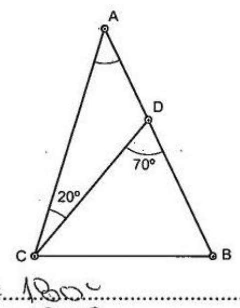
Otro procedimiento posible considera las propiedades de los ángulos de las figuras. Ambos triángulos tienen un lado en común, $\overline{CD}$. Por ello, tienen dos ángulos adyacentes. De esto surge que la amplitud de 1 es igual a 180° - 70°= 110°. Luego, si la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, $\hat{A}$= 180° – (20°+ 110°).

Ambas formas de resolver resultan adecuadas ya que permiten anticipar los valores de los ángulos hallados, pero consideramos que el segundo procedimiento puede resultar más cercano a prácticas cotidianas que se trabajan en el segundo ciclo de la escolaridad, en gran número de aulas. En éste se apela a averiguar el valor de un ángulo seleccionando uno de los datos conocidos, el valor de $\hat{D}$= 70°, como punto de apoyo para calcular el valor de los demás ángulos, sin necesidad de reparar en las características de los lados del triángulos isósceles CDB y su vínculo con el ángulo 1.

Respuestas correctas

De una muestra de 12617 alumnos el 7,4 % encontró el valor del ángulo ADC y dio alguna explicación respecto de cómo lo halló.

Ejemplo 12



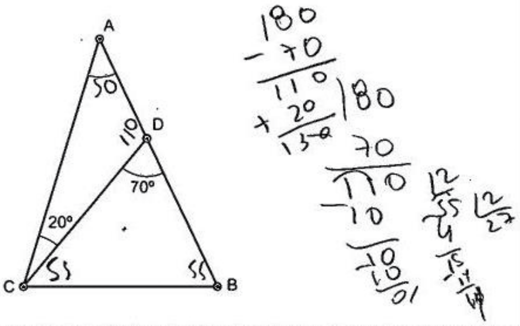
$\hat{C} + \hat{A} + \hat{D} = 180°$
$20° + \hat{A} + 110° = 180°$
$\hat{A} = 180° - (20° + 110°)$
$\hat{A} = 50°$
Lo pense por la propiedad

En este caso, el alumno no explicita cómo obtuvo que D= 110°, y alude a la "propiedad". Es posible que la expresión remita a la propiedad correspondiente a la suma de los ángulos interiores de todo triángulo, lo que se deduce de los cálculos que presenta en forma clara y ordenada, pero también a que la suma de los ángulos 1 y D es igual a 180°, porque son adyacentes.

Ambas propiedades aparecen en el próximo ejemplo, pero es utilizada de otra manera.

Ejemplo 13

3 Se sabe que los segmentos CD y CB tienen la misma medida y que los ángulos CDB = 70° y ACD = 20°. Calculá la medida del ángulo A.
Explicá cómo lo pensaste



el ángulo A mide 50° porque si un t[...] mide entre los 3 cuadriláteros 180° y D mide 110° y C 20° el otro iba a medir 50°

En este caso, pueden observarse varios puntos interesantes en la resolución de este estudiante, más allá de que registra "cuadrilátero" en vez de "ángulo": usa adecuadamente tanto la propiedad de la suma de los ángulos interiores del triángulo, como la correspondiente a la de los ángulos congruentes de un triángulo isósceles.

Identifica que el triángulo CDB tiene dos lados congruentes, e inferimos que ha considerado como congruentes a los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$ en vez de $\overline{CB}$. Luego estableció que los ángulos C y B son congruentes. Entonces, ambos sumarían 110°, y cada uno 55°.

Es de notar que ha completado el valor de todos los ángulos del dibujo, aún sin ser esto necesario para realizar la actividad. Sería posible pensar que ha establecido una congruencia entre $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$, porque esté habituado a analizar dibujos de triángulos isósceles que se encuentren en la misma posición respecto de los bordes de la hoja y por lo tanto identifique los lados congruentes con los consecutivos al lado horizontal.

Podríamos pensar que ha "adaptado"la figura a una que le resulta más familiar, para así poder analizarla.

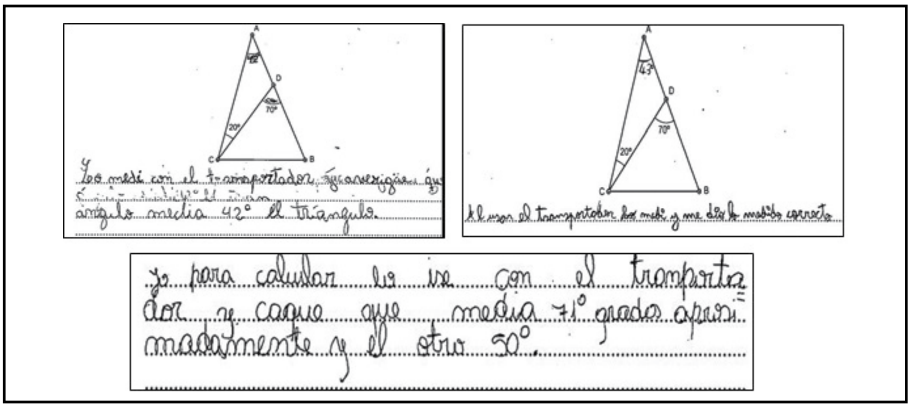
Respuestas parcialmente correctas

El porcentaje de estas respuestas ha sido muy bajo en esta ocasión, y no se han registrado ejemplos cuyos errores resulten significativos para analizar en este documento.

Respuestas incorrectas

A continuación presentaremos algunas respuestas erróneas que alcanzaron un 90,4%. En los siguientes tres ejemplos los alumnos optaron por el uso del transportador como herramienta para resolver el problema.

Ejemplos 14, 15 y 16

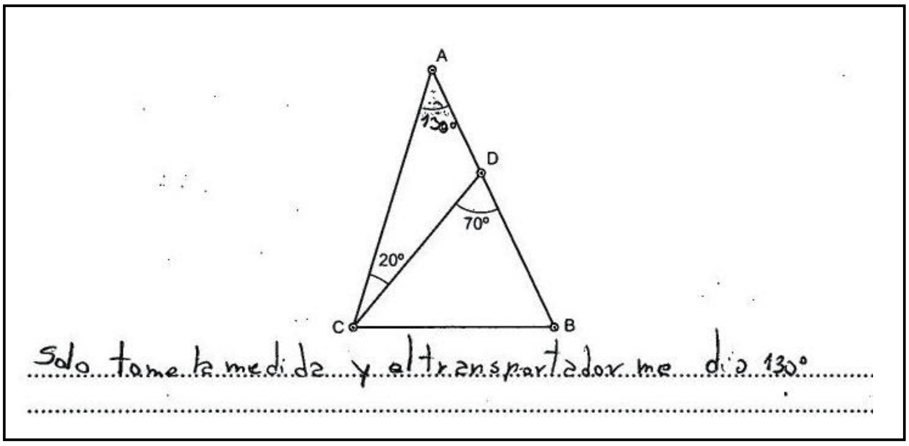


Aunque no les fue requerido para resolver es evidente que estos alumnos, contando con un transportador, lo utilizaron para averiguar el valor de A. Habiendo apelado a este procedimiento, y sin contar como dato con el valor del ángulo 1, estos estudiantes "obtuvieron" un valor que osciló entre los 40° y los 50 °, y lo aceptaron como resultado correcto.

Es de notar que uno de ellos argumentó que "al usar transportador, lo medí y me dio la medida correcta", mientras que otro manifestó sobre un ángulo "(…) saqué que media 71° aproximadamente (…)", aun teniendo 70° como dato explicitado en el enunciado.

Sería posible inferir que para estos alumnos el uso del transportador basta para validar una medición, por lo que no surge la necesidad de apoyarse en las propiedades de la figura para controlar el valor encontrado y resolver el problema.

Ejemplo 17



En este ejemplo encontramos cierta dificultad en interpretar sobre qué escala se tiene que leer (cuando el transportador tiene doble escala) o cómo usar el valor que brinda el uso del transportador. A diferencia de las respuestas anteriores, el alumno está otorgando el valor de 130° a un ángulo agudo, lo cual a través de nuevas instancias de aprendizaje podría llevarlo a replantearse si está bien utilizado el transportador debido a que la amplitud obtenida luego de la medición no se relaciona con las características de un ángulo agudo.

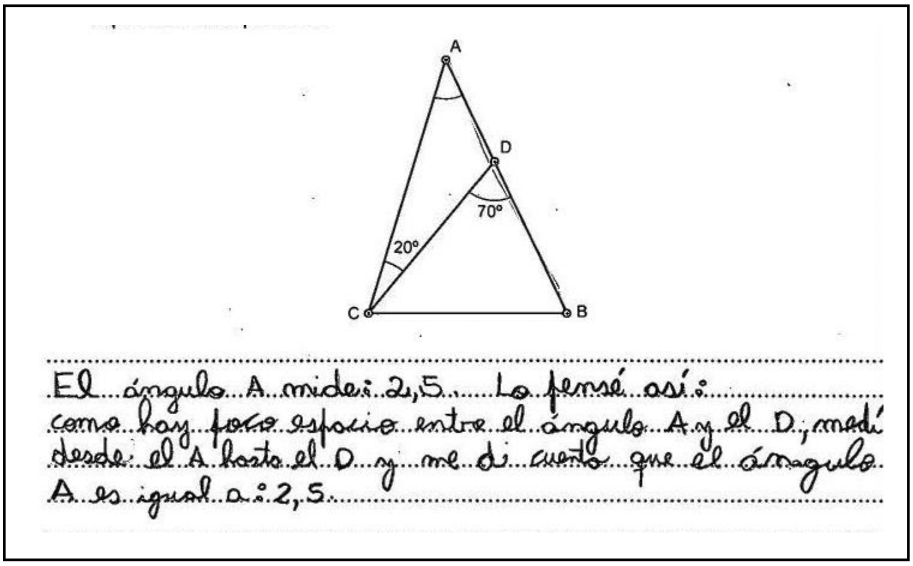
No deseamos desestimar la importancia de adquirir destreza en el uso de los elementos geométricos, pero es menos frecuente que se propongan actividades en las que haya que controlar la razonabilidad de ciertas medidas en función de las propiedades y características de los ángulos. Estas relaciones deberían ser objeto de trabajo en el aula para que los conocimientos no resulten desconectados entre sí.

En este caso, la actividad evaluada presenta una figura de análisis que, como hemos dicho, es un esquema que representa las relaciones necesarias para resolver el problema presentado sin explicitar todos los datos necesarios para ello.

Es absolutamente necesario que sea objeto de trabajo en clase el despliegue estrategias de resolución que requieran apoyarse en propiedades de estos objetos geométricos sin apegarse a la representación visual, lo que les permitiría a los alumnos avanzar en sus posibilidades de anticipar e inferir las relaciones no explicitadas en un enunciado.

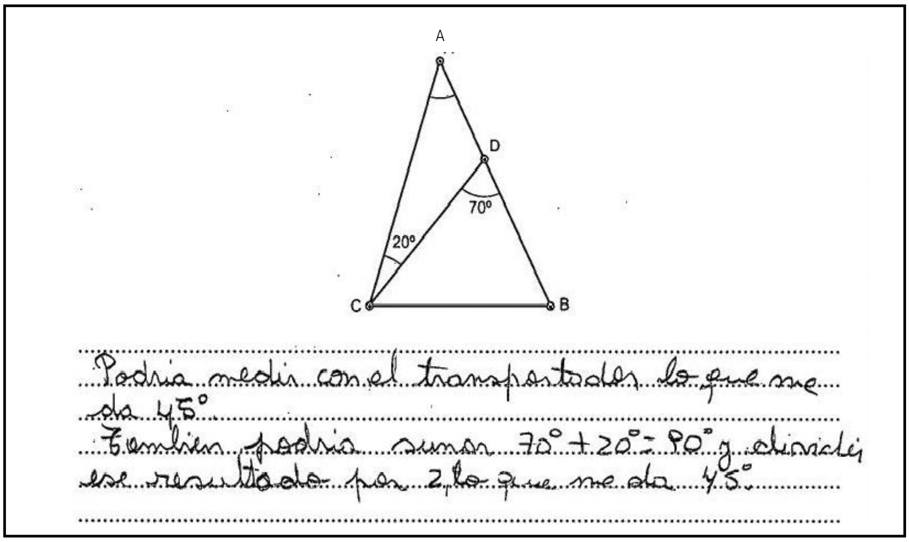
Resulta fundamental que brindemos ocasiones en las aulas para que los estudiantes avancen desde procedimientos experimentales y caracterizados por la contingencia de los valores obtenidos, hacia otros de tipo anticipatorio, que lleven a establecer el carácter necesario de los resultados, lo que constituye un propósito del segundo ciclo de la escolaridad primaria, central para profundizar en la racionalidad geométrica.

Ejemplo 18



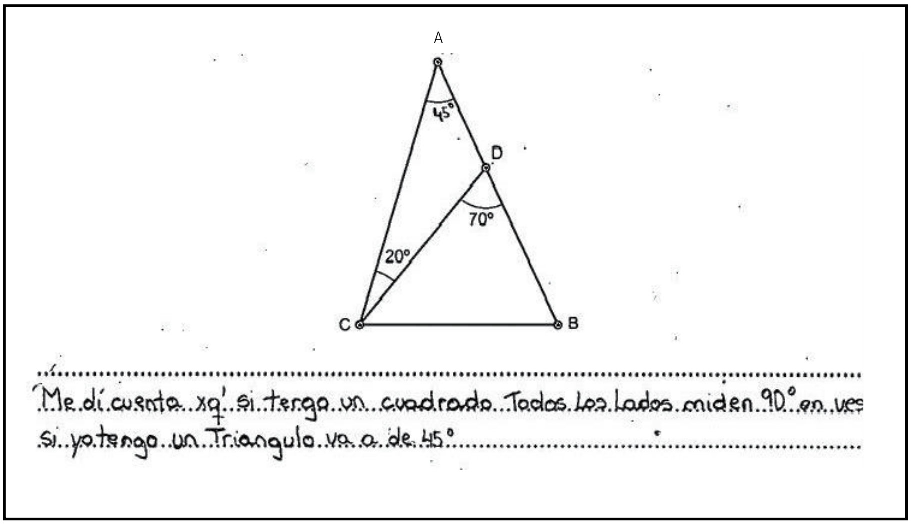
En este ejemplo el alumno otorga al ángulo A el valor de 2,5, por lo que suponemos toma la longitud del segmento AD como valor de la amplitud del ángulo A, por cuanto argumenta que "como hay poco espacio entre el ángulo A y el D, medí"

Ejemplo 19



En este caso, el alumno recurrió a una medición con transportador y para validar su trabajo parece haber tomado la suma de los ángulos cuyos valores aparecen como dato e intenta un procedimiento aritmético dividiéndolo por dos, para obtener el mismo valor que con el transportador.

Ejemplo 20



Es posible que este estudiante haya confundido la longitud del lado con la amplitud del ángulo. Tal vez su razonamiento haya sido, "si en el cuadrado cada ángulo mide 90°, y el triángulo es la mitad de un cuadrado, entonces sus ángulos también valen la mitad, o sea 45°".

PROBLEMAS SOBRE MEDIDA

Las actividades que se presentan a continuación no se refieren a contenidos estrictamente geométricos, sino que requieren poner en juego conocimientos vinculados con la medición.

El trabajo con mediciones implica cuantificar ciertos atributos (longitudes, áreas, pesos, etc.) de un objeto, lo que implica elegir una unidad y determinar cuántas veces esa unidad "entra" en el objeto a medir.

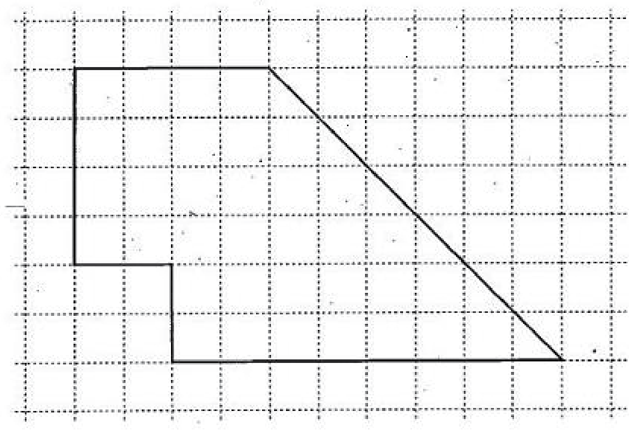
Esto requiere comprender cuáles son los atributos que un objeto conserva, a pesar de sufrir transformaciones de forma, posición o tamaño. También, tener presente que la medida obtenida siempre es aproximada, pero que cuanto más adecuadamente se seleccionen tanto la unidad como el instrumento para efectuar la medición, más "ajustado" será el resultado obtenido, por lo que existe una relación entre el atributo y la unidad elegida.

Además, resolver problemas vinculados con la medición de longitudes, capacidades, pesos, etc., requiere comprender tanto los resultados de las mediciones cuanto las unidades que se expresan en enteros, fracciones o decimales, razón por la cual medir muchas veces "cruza" lo geométrico y lo aritmético.

Problemas del área de un polígono

Se trata de un problema presentado a los estudiantes de 6° año, que involucra el cálculo de área de un polígono irregular dibujado sobre una cuadrícula, sabiendo que el área de cada rectangulito es de 1cm^2.

] Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm^2. Explicá cómo lo pensaste



Contenido:	Geometría y Medida
Capacidad:	Resolución de problemas
Desempeño:	Resolver problemas que requieran el concepto y cálculo de área y perímetro de polígonos regulares más usuales.

Los alumnos resolvieron el problema utilizando diferentes estrategias. Dado que la figura se presenta sobre un fondo cuadriculado, algunas variables quedan “resueltas”: el dibujo presentado contiene cierta información que los alumnos podrían utilizar para resolver, tal que los ángulos son rectos y que hay triángulos que “valen” la mitad de 1 cm^2 de superficie.

Como consecuencia de ello, una de las estrategias que surgieron con mayor frecuencia fue la de apoyarse en el conteo de la cantidad de rectangulitos y triángulos que forman la figura teniendo en cuenta que cada dos triángulos, se obtiene un rectángulo.

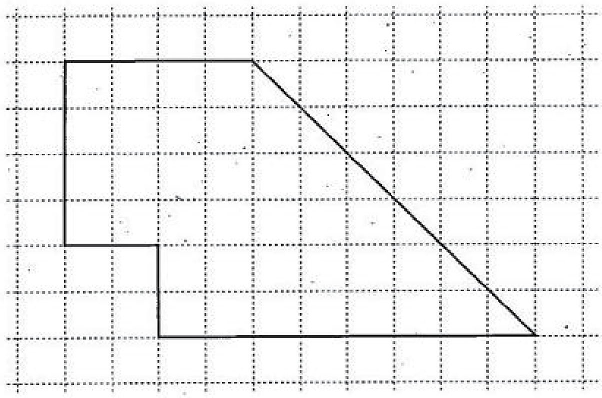
En cambio otros alumnos no se apoyaron en el conteo, y optaron por descomponer la figura en otras conocidas para ellos, calculando sus áreas parciales, para llegar a establecer el área del polígono.

Un 63,5% de una muestra de 13014 de alumnos no resolvió la actividad y de los alumnos que respondieron a la situación planteada, 18,5% lo hizo de manera correcta. Mostraremos a continuación algunos ejemplos.

Respuestas correctas

Ejemplo 21

Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm². Explicá cómo lo pensaste



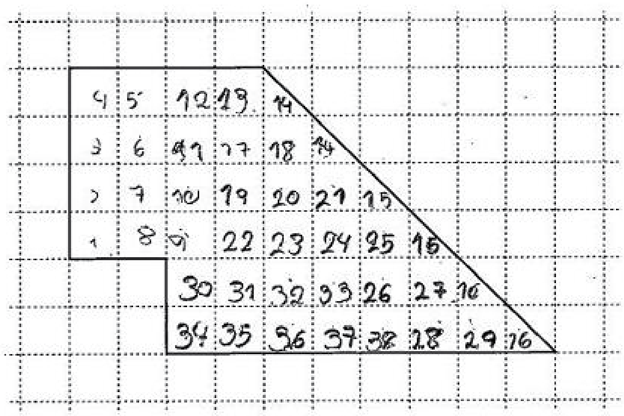
35 RECTÁNGULOS 6 RECTÁNGULOS A LA MITAD (TRIÁNGULOS) = 3 CUADRADOS 35+3=38

LO QUE HICE PRIMERO FUE CONTAR CUANTOS RECTÁNGULOS COMPLETOS HAY, DESPUÉS CONTÉ LOS QUE ESTÁN A LA MITAD, ESOS LOS DIVIDÍ POR 2 ME DIO 3, Y LO SUMÉ A 35 QUE SON LOS RECTÁNGULOS QUE HABÍA Y SAQUÉ EL ÁREA DEL POLÍGONO QUE ME DIO: 38 CM²

En este caso, el alumno emplea la estrategia de conteo, manifestando que contó la cantidad de rectangulitos "completos" y por otro lado, "los que están por la mitad", obteniendo 35 rectangulitos completos y seis mitades, que dividió por dos formando tres rectangulitos. Por último realizó la suma de ambas cantidades llegando al resultado correcto.

Ejemplo 22

Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm^2. Explicá cómo lo pensaste

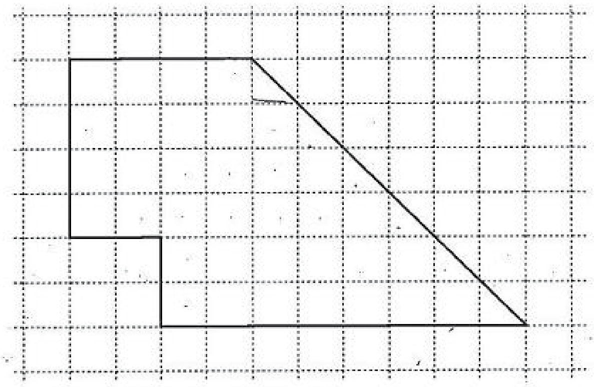


El area del poligano es de 38 cm

En este caso, vemos que el estudiante ha realizado el conteo de los rectangulitos, y marca con el mismo número a dos triángulos distintos, para indicar que va a formar un mismo rectángulo, tal vez como estrategia de control.

Ejemplo 23

2 Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm². Explicá cómo lo pensaste

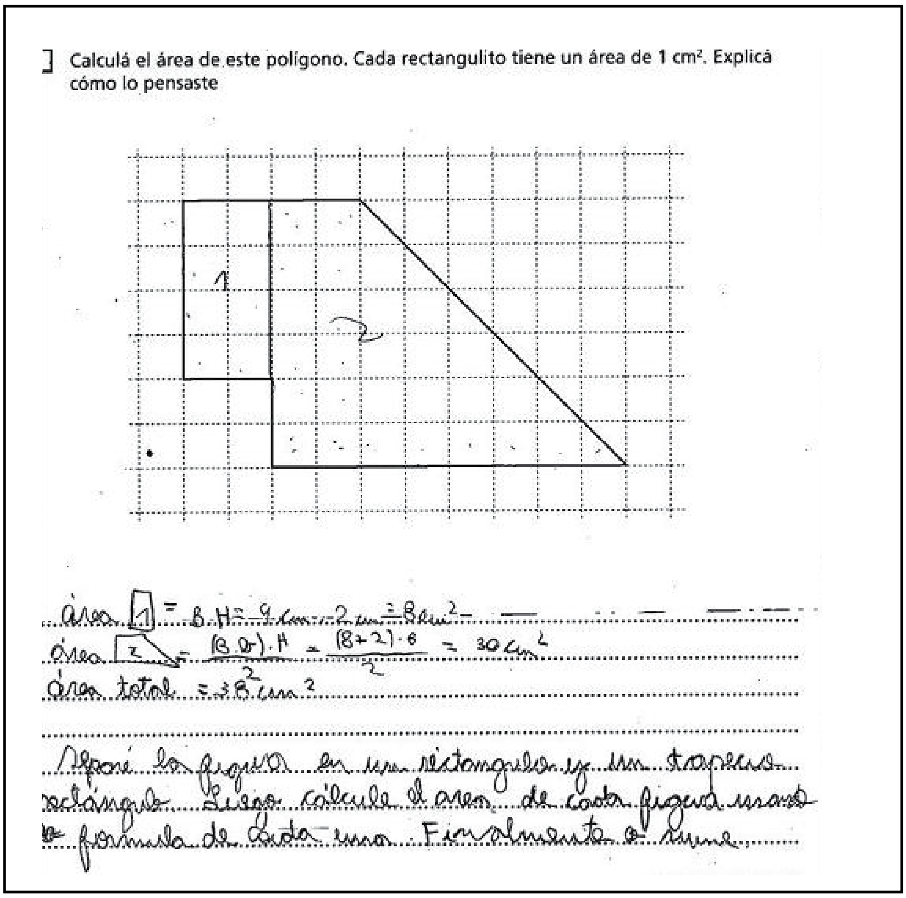


Toda el Area tiene 96$^{cm^2}$ y el Poligono ocupa un Area de 38$^{cm^2}$

Contando los cuadros de arriba y los del costado se los multiplica y se le resta a ~~todo~~ el resto de cuadritos el poligono ocupa 38 y quedan restantes 58 cuadros

En este ejemplo, el alumno también resolvió el problema utilizando una estrategia de conteo. Obtuvo el área del polígono como la diferencia entre el área de toda la cuadrícula presentada y el área del polígono. Es posible que el cuidado en calcular ambas áreas y establecer su diferencia pueda haberse usado como estrategia de control. Aunque puede resultar poco económico, el procedimiento es correcto

Ejemplo 24



Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm². Explicá cómo lo pensaste

área [1] = B.H = 4 cm . 2 cm = 8 cm²

área [2] = $\frac{(B+b).H}{2} = \frac{(8+2).6}{2}$ = 30 cm²

área total = 38 cm²

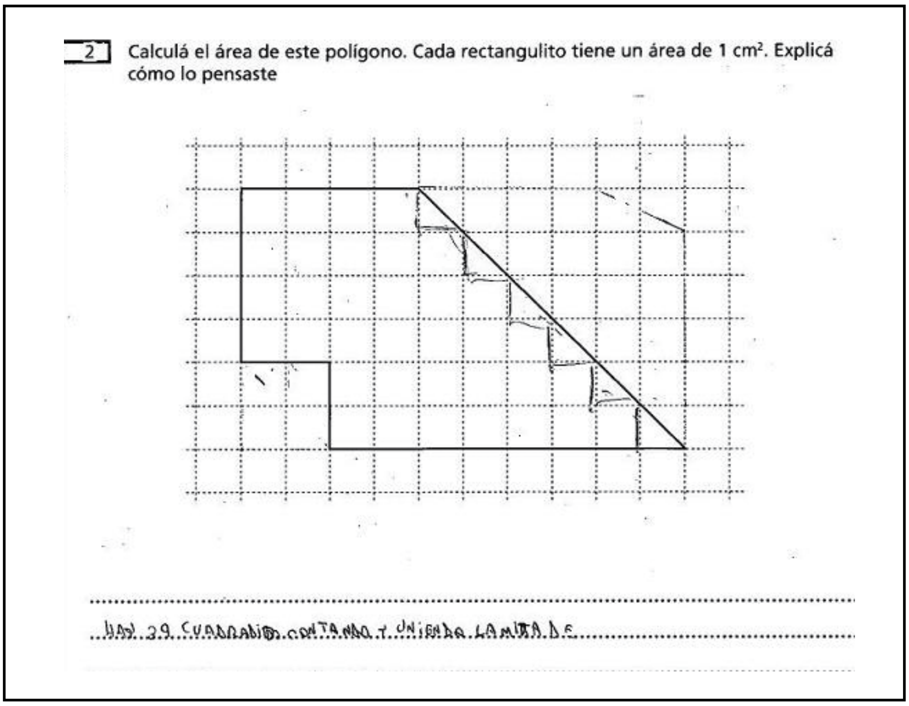
Separé la figura en un rectángulo y un trapecio rectángulo. Luego calculé el área de cada figura usando la fórmula de cada uno. Finalmente sumé

Este alumno, en cambio, resolvió el problema con una estrategia del segundo tipo de las mencionadas arriba. Estas suelen ser las que más esperan los docentes que los chicos usen, porque desde su punto de vista es una marca de avance.

Sin embargo, dado que el polígono se presenta con toda esa información "a la vista", esta sería una estrategia "menos económica" para esta situación: en este caso el alumno realizó trazos sobre el dibujo descomponiendo al polígono en dos figuras quizás más conocidas para él, un rectángulo y un trapecio. Numeró cada una de ellas, determinó la medida de algunos de sus elementos (base, altura), calculó sus áreas utilizando fórmulas y las sumó para obtener el área del polígono.

Respuestas parcialmente correctas

Ejemplo 25

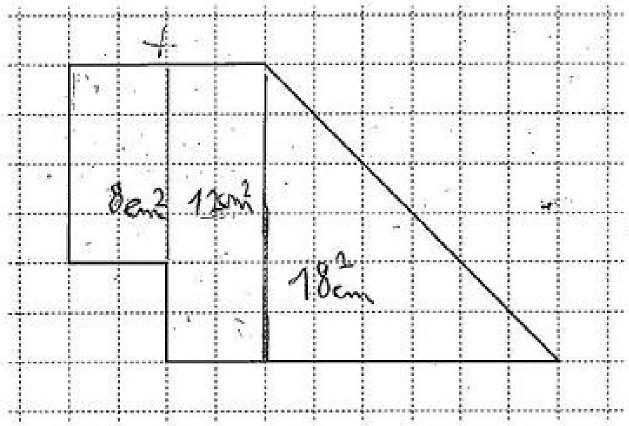


"Hay 39 cuadraditos contando y uniendo la mitad"

En este ejemplo, la estrategia es la misma que en el ejemplo 23 imagen 25, el estudiante se apoyó en el dato suministrado por el enunciado en el cual cada "cuadradito" tiene un área de 1cm^{2,} aunque no registró el conteo. Los trazos que el alumno realizó sobre la figura de análisis pueden remitir a que haya considerado que dos triángulos forman un "cuadrado". Aunque realizó un conteo erróneo, su estrategia es correcta.

Ejemplo 26

] Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm^2. Explicá cómo lo pensaste

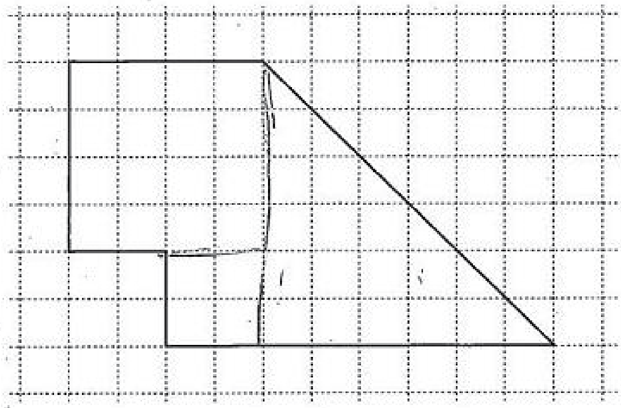


2 cm x 4cm = 8 cm²

Este estudiante descompuso la figura en dos rectángulos y un triángulo rectángulo, expresando en cada figura el área correspondiente en forma correcta. Aparece desarrollado el cálculo de un área parcial del polígono, y señalados los resultados de los otros dos, 12 cm^2 y 18 cm^2, tal vez para dar cuenta de cómo fue pensando la solución. No muestra cómo obtuvo resultado el área total, ni se observan cálculos de apoyo que nos permitan reconstruirlo pero podemos sospechar que el área del segundo rectángulo fue calculada de forma similar a la del primero. Lo que nos queda pendiente es determinar cómo obtuvo el área del triángulo.

Ejemplo 27

] Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm². Explicá cómo lo pensaste



lo pensaria como 1 triangulo 1 cuadrado chiquito y 1 grande [illegible] calcular el area de los 3 y luego los sumamos

Como en el ejemplo anterior, el alumno descompuso la figura, esta vez en dos cuadrados y un triángulo rectángulo, realizó una descripción del procedimiento a llevar a cabo para obtener la solución. También aquí se observa que el procedimiento es correcto pero no muestra ningún cálculo, y no se ha registrado el resultado del área total.

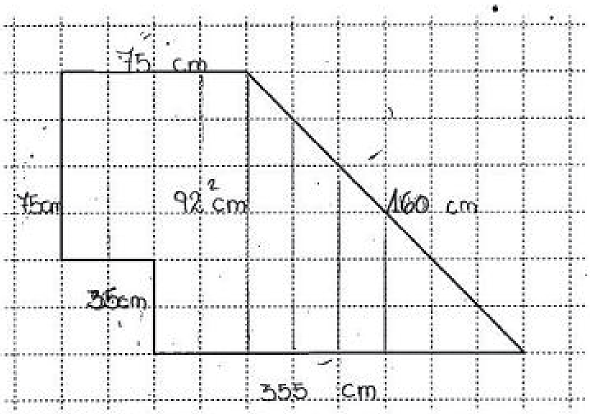
Respuestas Incorrectas

Otros alumnos resolvieron incorrectamente el problema al confundir la noción de área con la de perímetro.

En el ejemplo que figura a continuación, no se ha podido detectar la estrategia que desplegó el alumno para resolver, aunque declara que ha utilizado el transportador para medir la longitud de los lados.

Ejemplo 28

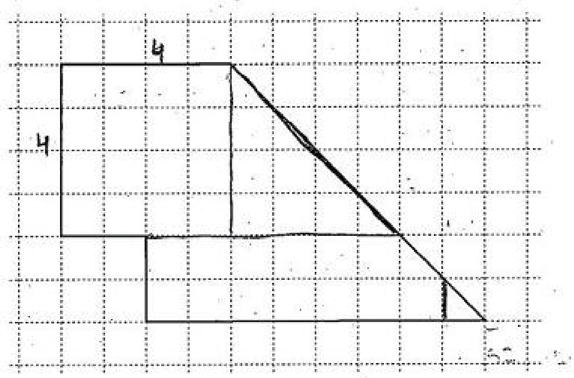
] Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm². Explicá cómo lo pensaste



Lo hize con el transportador midiendo sus centimetros

Ejemplo 29

Calculá el área de este polígono. Cada rectangulito tiene un área de 1 cm². Explicá cómo lo pensaste



P = 4 x 4 = 16 16

P = 7 x 2 + 2 . 2 18

= 14 + 4 12

= 18 P 46cm

4 x 4 x 4 = 12

lo pense cacando los perímetro de las 3 figras cuadrado rectangula y triangulas

En este ejemplo, el alumno realizó marcas sobre el dibujo, descomponiendo a la figura en dos triángulos rectángulos, un cuadrado y un pentágono irregular. Si bien la descomposición es correcta, uno de sus errores más relevantes es que confunde el concepto de área con perímetro.

Este problema, que frecuentemente se observa en la Educación Primaria, también ha aparecido en las respuestas de Educación Secundaria. Al respecto, retomamos lo expuesto en las Recomendaciones Metodológicas para la Enseñanza de la Matemática, Educación Secundaria-ONE 2013,

> *"No debemos interpretar la presencia de errores como ausencia de conocimiento por parte de los alumnos, sino como un modo particular de conocer en un determinado momento y lugar, en relación con una situación dada. La diferenciación entre perímetro y área no es algo que los alumnos aprendan de manera espontánea a partir de que el profesor comunique de manera declarativa esta diferencia. La escuela debe hacerse cargo de enseñar esta diferenciación a partir del trabajo matemático sobre actividades diseñadas a tal fin (…)"* [9].

Es por ello que reafirmamos la necesidad de generar un fuerte trabajo que permita analizar aspectos vinculados con la geometría y la medida a lo largo del segundo ciclo de la escolaridad primaria, proponiendo

> *"(…) situaciones donde estas dos medidas [área y perímetro] se involucren de maneras diferentes, problemas donde haya figuras que tengan igual perímetro pero distinta área, igual área pero distintos perímetro, la misma área y el mismo perímetro. Hacer explícitas estas relaciones permitirá que los niños distingan la independencia de estas magnitudes."*[10]

[9] *Ministerio de Educación de la Nación (2014), " Recomendaciones metodológicas para la enseñanza. Matemática. Educación Secundaria-ONE 2013", Diniece, (en prensa)*

[10] *Urquiza, M. (2007) "Medida" en Enseñar Matemática en la escuela primaria". Ed. Tinta Fresca*

TERCER AÑO

Juguetes

La mamá de Manuel compró en la juguetería 5 autitos y 10 muñecos como estos.
¿Cuánto pagó en total?

Mostrá como lo resolvés

M03N0392

Año: 3

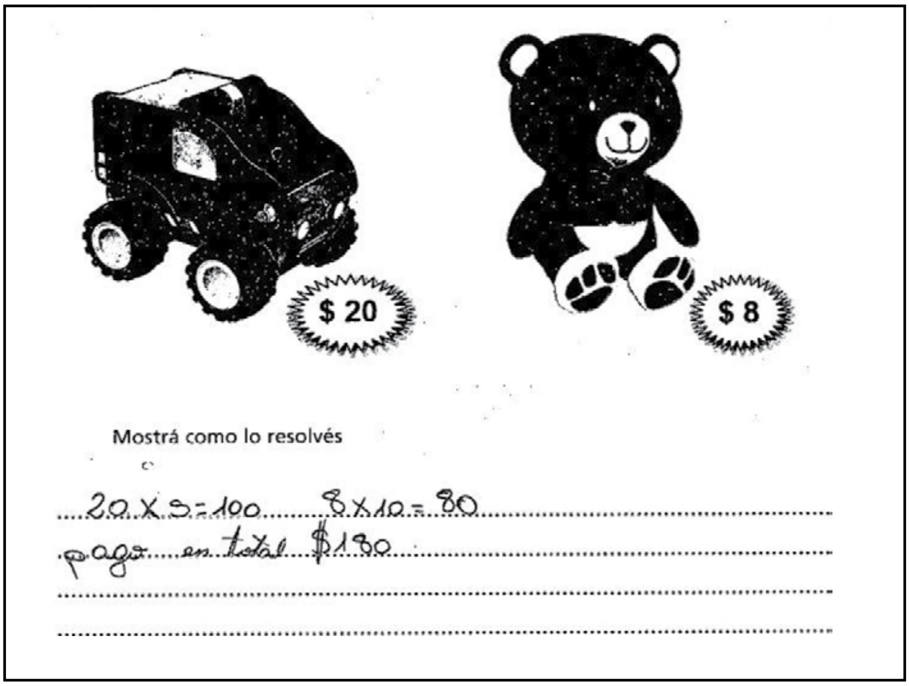
Contenido:	Números y operaciones
Capacidad cognitiva:	Resolución de situaciones en contextos intra y/o extra matemáticos.
Desempeño:	Resolver problemas de varios pasos, que involucren diferentes significados de las operaciones, utilizando diversas estrategias.

Los resolución problemas requieren en un primer momento una reconstrucción mental de la situación, y a partir de ella, los niños podrán elaborar distintas estrategias. En esta actividad deberán obtener resultados parciales a través de sumas o multiplicaciones para llegar a la solución del problema

A continuación presentamos algunos ejemplos donde un 42,5% de una muestra de 16255 de alumnos no resolvió la actividad y de los alumnos que respondieron a la situación planteada, 36,4% lo hizo de manera correcta utilizando diferentes procedimientos.

Respuestas correctas

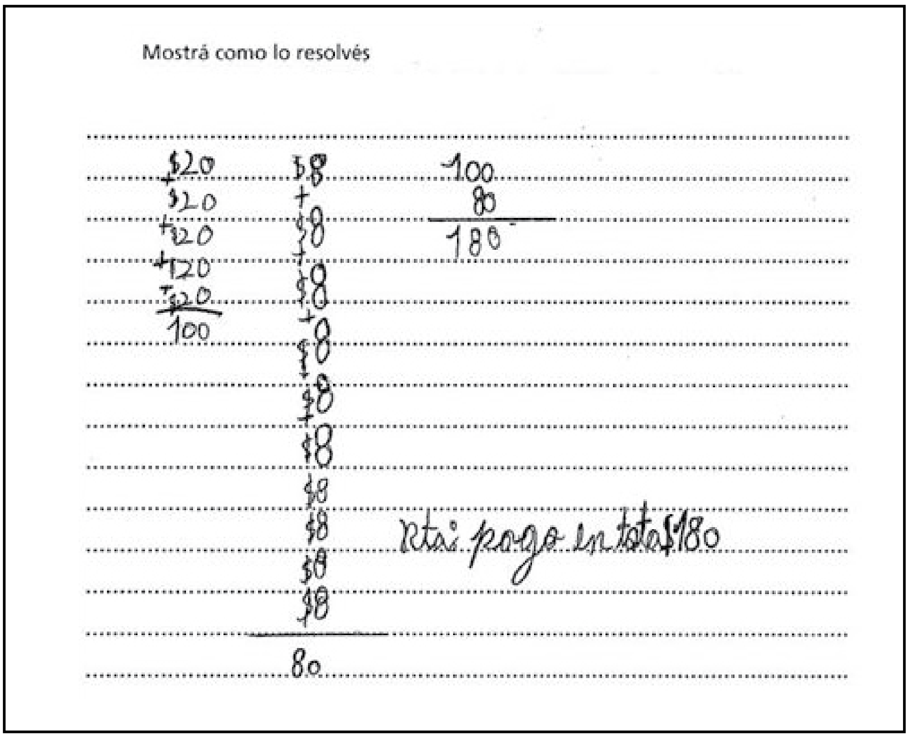
Ejemplo 30



En el ejemplo anterior el alumno realiza un procedimiento correcto en el cual multiplica el valor del autito y del oso por la cantidad de juguetes que indica el enunciado. Podemos pensar que los números en juego favorecieron el trabajo de cálculo mental, para llegar al resultado final.

Ejemplo 31

En este ejemplo el niño operó en el campo aditivo a través de sumas sucesivas encolumnando las cantidades para poder llegar a la solución del problema.



Sin embargo, tener la organización en "columna" para resolver estas operaciones parecería ser una formalidad en el caso en que suma 8, ya que este número, a diferencia del 20, no es "redondo" y por lo tanto, puede resultar difícil de sumar sucesivamente. Por lo que no podemos saber si este niño habrá contabilizado los 8 o habrá partido del primer 8 y siguió sumando sucesivamente, o si habrá pensado en 10 veces 8.

Aunque los cálculos registrados no nos permiten definir cuál o cuáles han sido las estrategias desplegadas, pareciera que llegó a algunos de los resultados apoyándose en cálculos mentales.

> *(…) Recordemos que con "cálculo mental" nos referimos a un cálculo reflexionado, en el que se conjugan los distintos procedimientos que los alumnos con consideran más convenientes para cada situación, basados en las propiedades de las operaciones y en los resultados disponibles en su memoria* [11].

[11] *Itzcovich, Horacio, (2007) "El trabajo escolar en torno a las fracciones" en La Matemática escolar, Buenos Aires, Editorial Aique.*

Ejemplo 32

Mostrá cómo lo resolvés

20+20+20+20+20+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8=180

Rta: Pagó $180 en total

En este ejemplo, el niño trabajó con el cálculo en forma horizontal juntando las cantidades correspondientes a los autos y los ositos en un solo paso. Podríamos conjeturar que a pesar de realizar una sola cuenta efectuó “pausas”, podría haber sumado los 20, llegar al 100 y a partir de allí continuar con un sobreconteo hasta el 180, o a los 100 agregarle los 80. A su vez suponemos que las marcas en los “ochos” fueron de registro de algún cálculo mental.

Es posible que ambos ejemplos se hayan apoyado en cálculos similares, con la diferencia de que uno escribe en columna y el otro horizontalmente; uno une todo en un solo cálculo y el otro hace dos cuentas separadas para unir al final.

Respuestas parcialmente correctas

Ejemplo 33

Mostrá como lo resolvés

Justificacion: Multiplico para saber cuanto pago en total

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 20 \\ \hline 100 \end{array}$$

Rta: Pago en total 100

Justificacion: multiplico

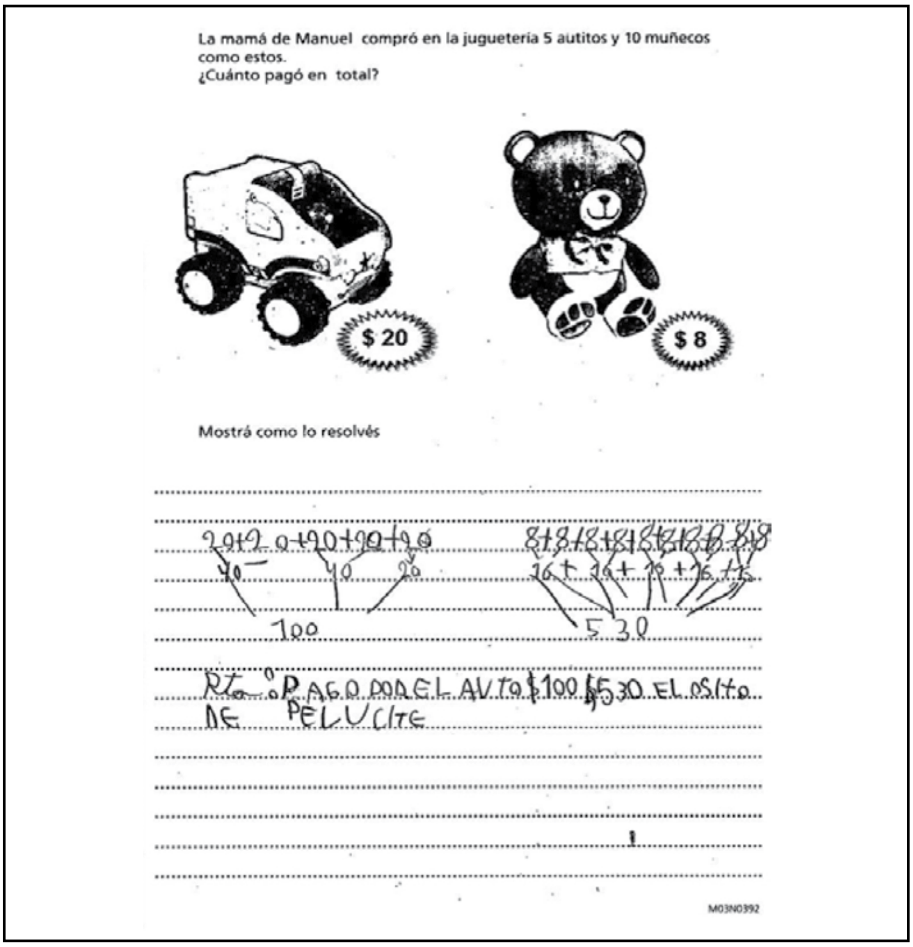
$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 8 \\ \hline 80 \end{array}$$

Rta: Pago en total 80

Con este procedimiento el alumno obtiene de cada operación un resultado parcial. El procedimiento es correcto pero omite la suma de los resultados parciales para llegar al resultado final.

A su vez intenta justificar los pasos realizados. Es posible interpretar que en su aula se estaría trabajando sobre la justificación de procedimientos o estrategias elaboradas para resolver.

Ejemplo 34



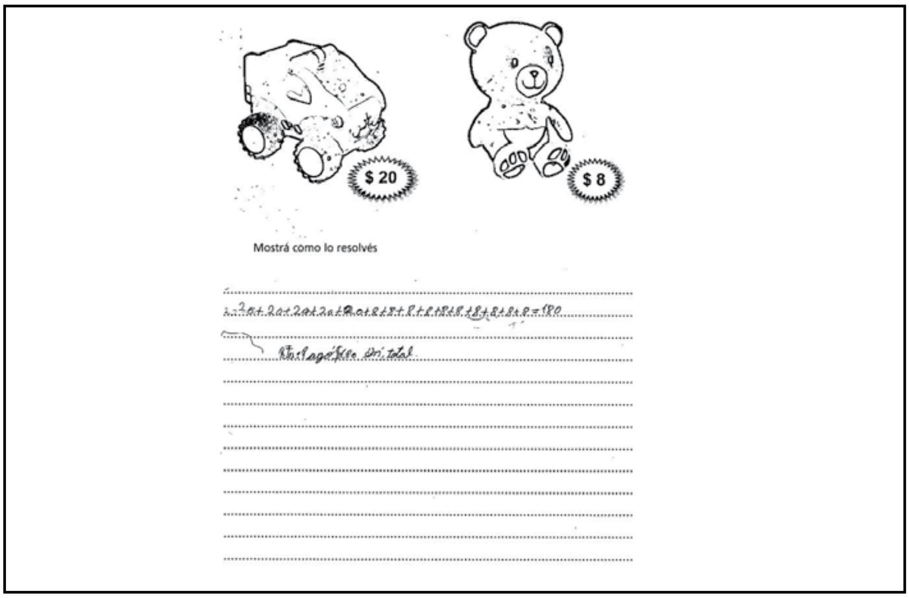
En este ejemplo podemos observar que el niño sumó los veintes agrupándolos de a dos, obteniendo 40 para luego volver a sumar y así llegar al 100. Igual procedimiento utilizó al sumar los 8 pero con error de cálculo. Agrupó los 8 obteniendo cinco veces 16, luego sumo los cinco seis y así llegó al 30. Lo mismo realizó con los cinco dieces pero al sumar es probable que haya pensado en (1+1+1+1+1) y al escribir el resultado "se olvidó del cero" obteniendo 5 en lugar de 50. Finalmente ese 5 lo utiliza como 500.

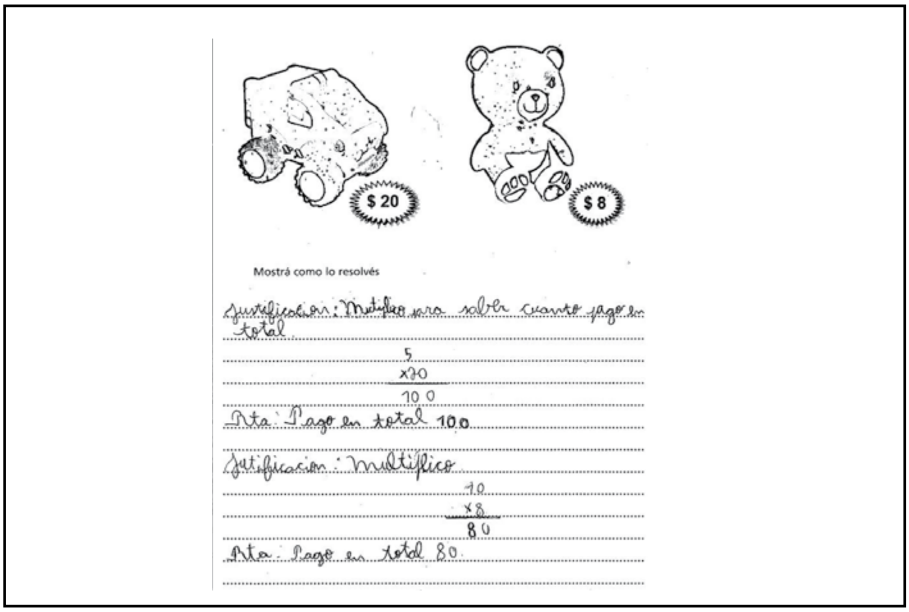
Algunos niños van descubriendo las ventajas de desarmar los números y sumar de a diez y comienzan a utilizar este procedimiento, pero también pierden el control del valor de la posición de las cifras, y suman dieces como si fuesen unidades, error que puede verse reforzado por propuestas de enseñanza muy centradas en procedimientos algorítmicos. El procedimiento es interesante y muestra un rico trabajo de cálculo mental.

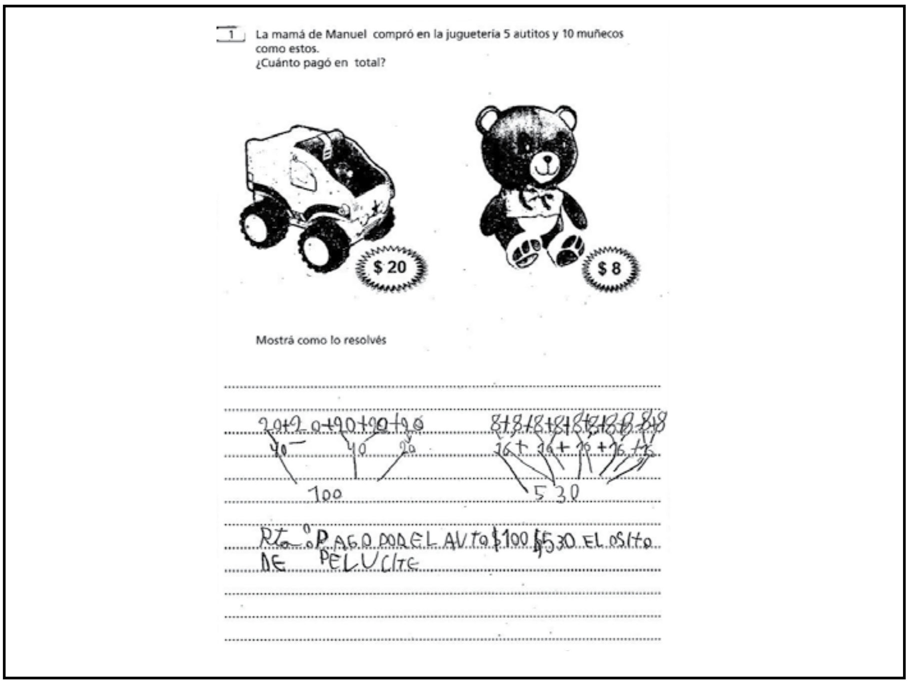
Respuestas incorrectas

A continuación veremos algunos ejemplos donde los niños han tomado los datos del enunciado o los precios de los objetos para ser sumados o multiplicados entre sí.

Ejemplos 35, 36 y 37







Estos niños probablemente no han podido encontrar el sentido al problema y respondiendo a la idea que "algo debo hacer con los números que aparecen" los utilizan para operar.

> *"No se aprende matemática solamente resolviendo problemas. Es necesario, además un proceso de reflexión sobre ellos y también sobre los diferentes procedimientos de resolución que pudieran haber surgido entre los integrantes de la clase"*[12]

Ante estas situaciones es necesario replantear las prácticas y el modo, cómo los resultados son comunicados y socializados. No se trata sólo de ofrecer situaciones, sino de elaborar y compartir modos de resolución, debatir sobre los errores y así construir conjuntamente el sentido del problema.

> *"En suma, la circulación del saber-sea durante la resolución del problema o a continuación de la resolución- permite la toma de conciencia sobre lo que ya sabe y de los límites de este saber. Posibilita la apropiación de estrategias utilizadas por otros que se evidencian como más adecuadas, explicita los errores recurrentes, etcétera. De este modo, favorece la construcción del sentido y, por lo tanto, el aprendizaje de los contenidos de enseñanza"*[13]

---

[12] Ressia de Moreno, Beatriz, "La enseñanza del número y del sistema de numeración en el Nivel Inicial y el primer año de la EGB" en Panizza, M (comp.) (2003) Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas Buenos Aires, Editorial Paidós.

[13] Ressia de Moreno, Beatriz,op. Cit.

El libro de Inés

2 Inés está leyendo la página 98 de un libro. Si el libro tiene 369 páginas.
¿Cuántas páginas le falta leer para terminarlo?

Mostrá como lo resolvés

....

....

....

....

Contenido:	Números y operaciones
Capacidad cognitiva:	Resolución de situaciones en contextos intra y/o extra matemáticos.
Desempeño:	Resolver problemas de varios pasos, que involucren diferentes significados de las operaciones, utilizando diversas estrategias.

Podemos ubicar a este problema en el campo aditivo, por cuanto requiere determinar la distancia entre dos números, y puede resolverse con una suma o una resta.

Una variable didáctica que se manejó en su formulación, fue el tamaño de los números involucrados. Si el problema fuera "Juan tiene 6 figuritas, cuántas le faltan para tener 15", estaríamos ante un problema similar, en el cual hay que calcular la distancia entre dos números pero, dado que las cantidades en juego serían pequeñas, podría recurrirse a un conteo o a un "sobreconteo" para resolverlo, partiendo de 6 para llegar a 15 y así calcular esa distancia.

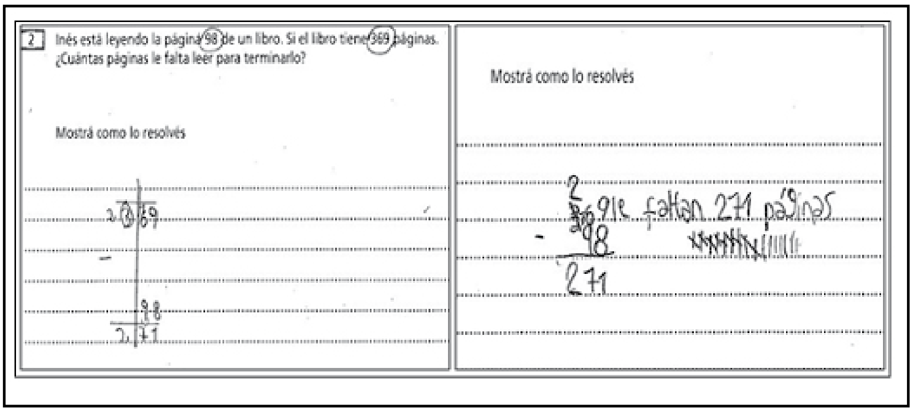
En el caso del problema evaluado, una posibilidad de resolución se vincularía con que los alumnos sumaran hasta obtener el complemento, partiendo de 98 para ir "agregando" páginas hasta llegar a 369. Pero los números elegidos son "grandes", y tal vez promovieran calcular de otro modo, siendo la resta la operación más adecuada para resolverlo. En ese caso, podrían presentarse diferentes maneras de plantear el cálculo.

Conforme a esto, la variedad de respuestas seleccionadas en este documento se centran en las que se usaron sumas o restas para dar solución al problema y en las diferentes formas de desplegar los cálculos involucrados.

Respuestas correctas

A través del análisis de un 38,4% de una muestra de 14470 alumnos, encontramos que la estrategia más utilizada fue el algoritmo de la resta.

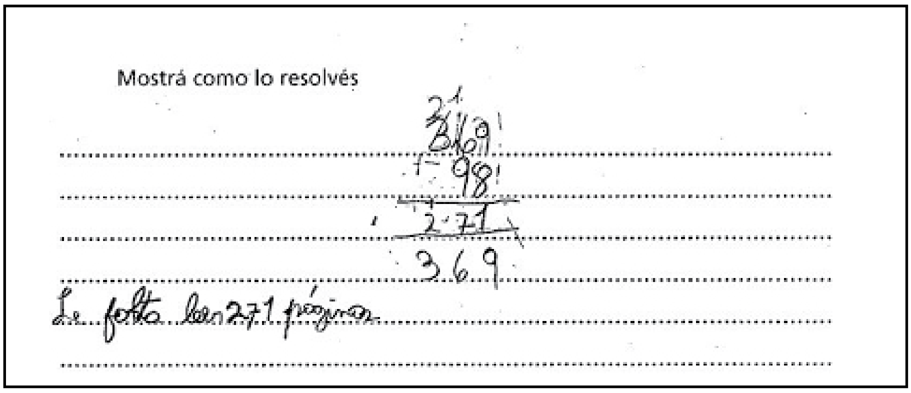
Ejemplos 38 y 39



En ambas respuestas puede observarse que se ha elegido la resta como operación para determinar la distancia entre ambos números, y se opera correctamente. En uno de los ejemplos, se descompone el 360, "agregando" un cien a los 60 para restarle 90 pero es probable que no haya controlado que el 1 que pide prestado es 100 y que le queda 160 – 90. El otro alumno además de apoyarse en la misma técnica utilizó un procedimiento gráfico, posiblemente representando los dieces con cada raya, para verificar la resta realizada.

En el siguiente ejemplo, se acompaña la resolución de 369 – 98, con una forma de abreviar la suma del resultado, 271, al que se le vuelven a sumar los 98, obteniéndose de nuevo los 369 que fue la cantidad desde la que se partió. Funciona como una suerte de "técnica" bastante difundida en las aulas, para controlar si el resultado es correcto.

Ejemplo 40



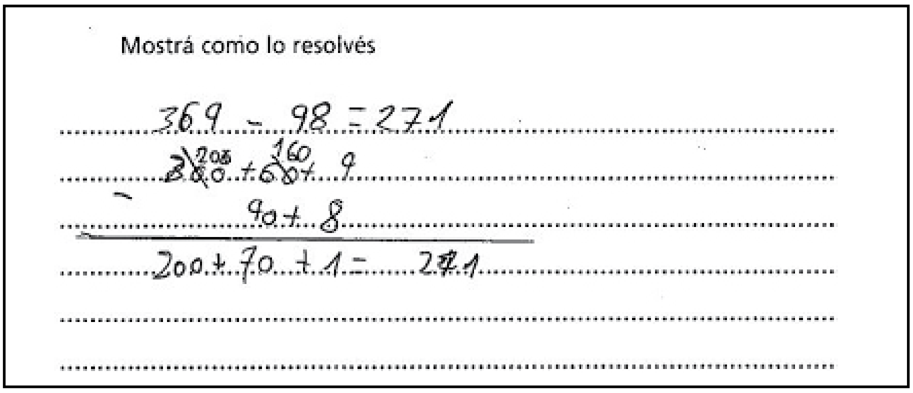
En todos estos casos, los alumnos usan "la cuenta" de la resta, y muestran un dominio sobre este procedimiento. Quizás esto suceda por la fuerte presencia de los algoritmos en la enseñanza.

> *"Los algoritmos de suma y resta son una construcción histórica que demandó mucho esfuerzo y tiempo. Se trata, sintéticamente, de una secuencia de pasos que, sin importar los números que intervienen, permiten obtener el resultado de una suma o de una resta. Al tratarse de algoritmos es lógico aceptar que los fundamentos de su funcionamiento estén ocultos bajo un modo de representación que intenta ser el más económico"*[14]

Pero también hemos encontrado ejemplos de respuesta, en las que los alumnos han planteado cálculos basados en otras estrategias, como por ejemplo la que se muestra a continuación, donde utiliza la descomposición de los números, quizás porque este procedimiento le ofrece una mayor posibilidad de controlar su modo de resolver o de comunicar su idea.

[14] *Itzcovich, Horacio y otros (2007), "Acerca de la enseñanza de la suma y de la resta" en La matemática escolar, Aique Grupo Editor*

Ejemplo 41


Mostrá como lo resolvés

369 – 98 = 271

205 160
300 + 60 + 9

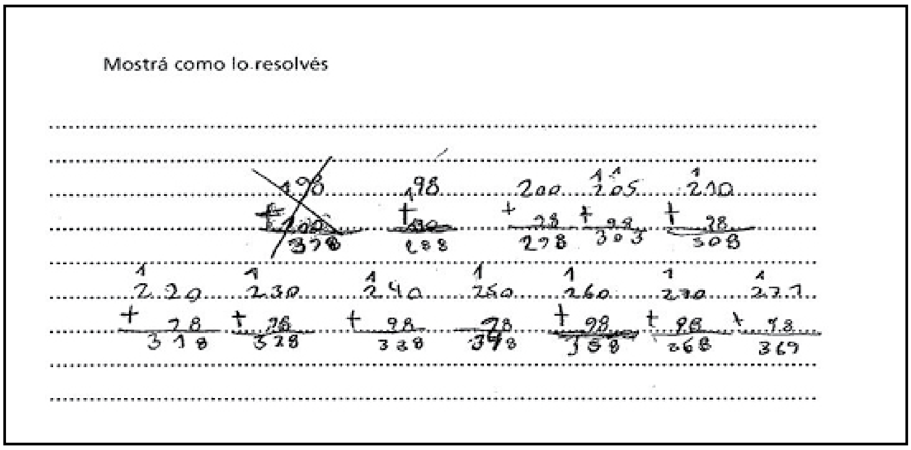
90 + 8

200 + 70 + 1 = 271

La aparición de esta estrategia responde, sin dudas, a las oportunidades que se han ofrecido en esta aula para ayudar a los alumnos a producir recursos de cálculo, que se vinculen de modo más explícito con el valor posicional y que colaboran en que puedan ejercer un mayor control sobre los pasos que siguen para resolver.

En la siguiente respuesta puede observarse otro procedimiento en el que el alumno fue arriesgando diferentes sumas, “agrandando” el número que suma al 98, y así probó sucesivamente. El primer cálculo fue tachado, posiblemente porque consideró que tenía un error (198 + 200), quizás porque se pasaba de 369 o se dio cuenta de que comenzó con 198 en lugar de hacerlo con 98. A continuación suma 130 al 98, y luego 200, 205, 210, obteniendo sucesivos resultados cada vez más próximos a 369. Continúa agregando de a una decena, hasta llegar a 270 y luego 271, obteniendo exitosamente la solución sin recurrir a una resta.

Ejemplo 42

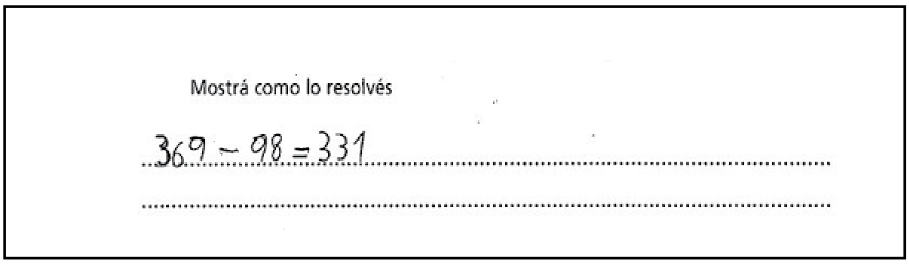


Respuestas parcialmente correctas

Un 16,3% de alumnos resolvió adecuadamente el problema, restando las páginas leídas al total de páginas del libro, para obtener lo que faltaría leer, aunque tuvo errores de cálculo.

A continuación puede observarse un ejemplo de respuesta, que suele ser bastante común, en el que, para calcular se "rompe" la estructura del número, y se consideran las cifras por separado, invirtiendo el orden de las cantidades que se restan. Así vemos que se restó "9-8" y "9-6", y se obtuvo 331. Es posible que este alumno haya perdido al calcular, la posibilidad de controlar que si quitamos aproximadamente 100 a 339, no es posible obtener 331, cantidad tan cercana a 369. Es responsabilidad de la enseñanza proponer situaciones de estimación, y los docentes reflexionar sobre los riesgos de estudiar la resolución de cuentas con métodos que tratan a las cifras de los números por separado (como el algoritmo usual, cuando se propone desvinculado de otras estrategias)

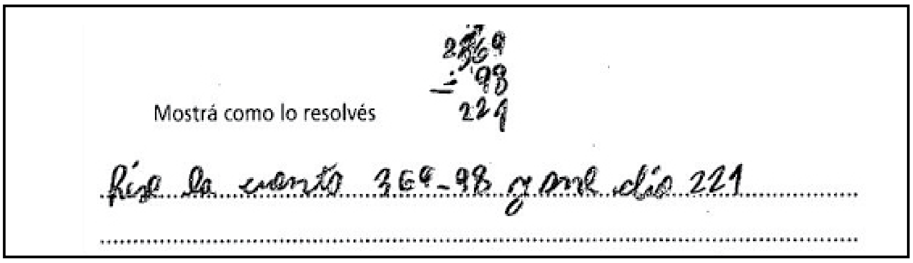
Ejemplo 43



Respuestas incorrectas

A continuación presentaremos algunas respuestas erróneas que alcanzaron un 42,8%.

Ejemplo 44



En este caso, es posible que el alumno haya puesto en práctica una técnica de resta cifra por cifra, "pidiéndole uno al compañero", pero al no controlar el significado de ese uno pedido ni la función que cumple en el procedimiento, lo usa mal, sumándolo al 6 para obtener 7, en lugar de considerar un 16, obteniendo finalmente dos cienes, dos dieces y un uno, es decir, 221. Es oportuno aclarar que se suelen encontrar errores relacionados al valor posicional en torno a la ubicación de los números más aún cuando estos presentan diferente cantidad de cifras.

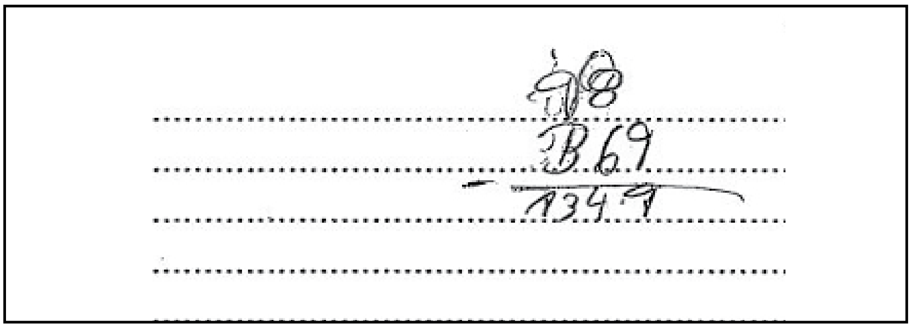
La numeración escrita está formada por una serie de operaciones (sumas y multiplicaciones) que hacen a su organización posicional y decimal y los cálculos están presididos por reglas que dependen de la organización de los números. Por ejemplo, en 369 se encuentra subyacente el 300 (100+100+100), 60 (10+10+10+10+10+10) y 9 (1+1+1+1+1+1+1+1+1), si a ese número se le agrega 98, es decir, 90 (10+10+10+10+10+10+10+10+10) y 8 (1+1+1+1+1+1+1+1)) el niño al sumar los "dieces" formaría un 150 (100+ 50) y al sumar los "unos" un 17. A partir de allí debe discernir cuáles de las "partes" en las que descompuso los números son del mismo orden para componerlas entre sí (300 +100), (50+10) y finalmente dejar el 7 en el lugar de los "unos"

> *"En definitiva, el abordaje usual de la numeración escrita no sólo es infructuoso en el sentido de que los niños no llegan a comprender la organización que se les propone sino que también podría obstaculizar la comprensión del funcionamiento de los números y las operaciones (Wolman, 1999)"*[15]

[15] *Quaranta,Tarasow,Wolman ,"Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración-. –avances de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas" en Enseñar Matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB, Panizza Mabel. Editorial Paidós , 2003.*

Tal y como se detalló anteriormente, los fundamentos que subyacen al funcionamiento de un algoritmo- en este caso la lógica del sistema de numeración- quedan ocultos, por lo que es posible que si se estudia sin comprender su funcionamiento, como un mecanismo aislado, la arbitrariedad que puede tener desde el punto de vista de los alumnos puede llevar a que algunos de ellos "inventen" reglas tan arbitrarias (desde su perspectiva) como las que se les exige estudiar.

Ejemplo 45



En este caso, puede observarse que el estudiante encolumnó los números partiendo de la izquierda y luego sumó, en lugar de restar. En este caso tanto la elección de la operación cuanto el desarrollo del algoritmo parecieran no contemplar un análisis del sentido del problema ni de la estructura de los números en juego. El resultado da cuenta de una suma donde el número 98 está mal "encolumnado" el 9 (90) está en el lugar de los cienes y el 8 en el lugar de los dieces.

> *(…) podremos analizar no solamente qué han aprendido sobre el valor posicional, sino también cómo utilizan este conocimiento cuando producen e interpretan cantidades cuando reflexionan acerca del valor del 0 en el sistema, cuando se enfrentan con cuentas escolares, cuando resuelven las operaciones que ellos mismos han planteado para encontrar la solución de las situaciones problemáticas propuestas.*[16]

[16] *Lerner de Zunino, Delia en "La Matemática en la Escuela - Aquí y Ahora –" Capítulo 4 "EL VALOR POSICIONAL", Editorial Aique*

Bruno y Hernán

Bruno tomó 3 vasos de ¼ litro de jugo y Hernán 2 botellas de ½ litro.
¿Quién tomó más jugo?

Respuesta:

....

Contenido:	Geometría y Medida
Capacidad cognitiva:	Resolución de situaciones en contextos intra y/o extramatemáticos.
Desempeño:	Resolver un problema que requieran estimar longitudes, pesos o capacidades.

La resolución de este problema requiere movilizar varios conocimientos, como la relación entre las fracciones y la medida, la relación entre partes y el entero, y diferentes representaciones que admiten los números racionales. Asimismo como los recipientes son de diferente capacidad constituyen una variable didáctica.

Sabemos que los conocimientos que los alumnos han tenido oportunidad de elaborar a lo largo del primer ciclo sobre los números naturales, funcionan como un obstáculo a la hora de trabajar con fracciones, dado que éstas "quiebran" con muchas de las ideas que los niños tenían sobre el funcionamiento de los números.

Esta situación requiere sumar cuartos y sumar medios y comparar las cantidades de agua consumidas por Hernán y por Bruno, por lo que es necesario que los alumnos tengan disponibles recursos para "representar" fracciones que resultan equivalentes.

Probablemente se haya puesto en juego la idea de que a denominador mayor ($^{1}/_{4}$ en este caso) la parte del entero es más pequeña que la representada por la fracción que corresponde a Bruno, cuyo denominador tiene un número menor ($^{1}/_{2}$). Otro concepto que se presenta en el problema es la relación de dobles y mitades ($^{1}/_{4}$ + ¼ =$^{1}/_{2}$).

Por otra parte, las botellas suelen ser más grandes que los vasos, y algunos chicos podrían decir que toma más el que toma dos botellas (sin comparar fracciones) porque las botellas a veces tienen mayor capacidad que los vasos.

En este caso, y dado que lo que está en juego son cantidades continuas, la complejidad aumenta, por cuanto es posible considerar que la mayor cantidad de vasos (3) que tomó Bruno no implica necesariamente un mayor consumo de jugo en relación con las (2) botellas que tomó Hernán, sino que es necesario comparar la capacidad de ambos recipientes.

De este modo, sería necesario contar la cantidad de cuartos y medios para establecer quién tomó más jugo.

Hemos encontrado una variedad de soluciones, entre las cuales seleccionamos algunas para analizar, tanto por su recurrencia como por su significatividad.

A continuación presentamos algunos ejemplos donde un 44,6% de una muestra de 14618 de alumnos resolvió erróneamente la actividad y de los alumnos que respondieron a la situación planteada el 12,6 %, lo hizo de manera correcta, utilizando diferentes procedimientos.

Respuestas correctas

Ejemplo 46

Respuesta:
HERNÁN TOMÓ MÁS JUGO.

Mostrá cómo lo resolvés.

250 L + 250 L + 250 L = 750 L

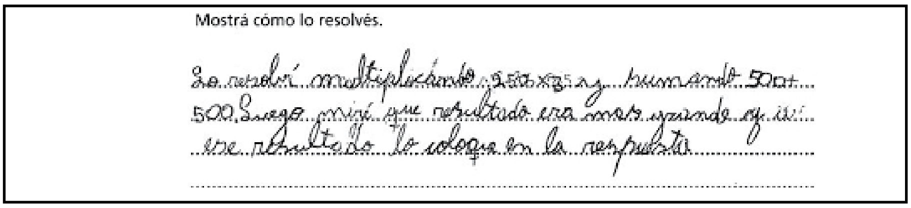
500 L + 500 L = 1000 L

En este ejemplo es posible que el alumno haya otorgado a ¼ el valor de 250 y a ½ el valor de 500. Quizás esto se deba a la practicidad que otorga operar en números naturales y el camino recorrido sobre la medida en relación a kilos y la equivalencia de 1/4 = 250g o también por sus conocimientos extraescolares de estas equivalencias.

El niño utilizó "litros" que no se corresponde estrictamente con la unidad de medida que corresponde a ¼ litro de jugo. Suele ser frecuente en los alumnos utilizar una medida conocida como punto de apoyo para comparar las cantidades equivalentes y así operar adecuadamente.

Vemos en la siguiente respuesta otro ejemplo que supone “llevar” la cantidad de jugo a una expresión equivalente utilizando números naturales. En el contexto de la medida, estos alumnos dan cuenta de sus conocimientos sobre la equivalencia entre diferentes representaciones para una misma cantidad, que ponen en juego en el momento de operar.

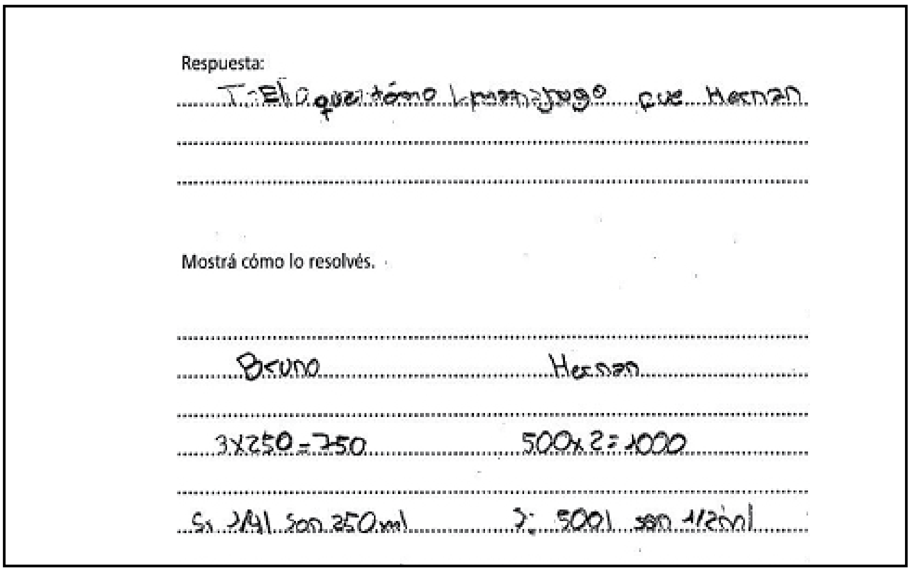
Ejemplo 47


Mostrá cómo lo resolvés.

Lo resolví multiplicando 250x3 y sumando 500+500. Luego miré que resultado era más grande y ese resultado lo coloque en la respuesta

En el siguiente ejemplo, el estudiante especifica las unidades de medida. En ambos casos opera correctamente y utiliza la multiplicación en lugar de la suma, planteando la equivalencia entre ¼ l y 250 ml para el caso de Bruno, aunque para Hernán, tal vez por una distracción, invierte las unidades “500 l” y “½ ml”.

Ejemplo 48


Respuesta:

T: El que tomó más jugo fue Hernan

Mostrá cómo lo resolvés.

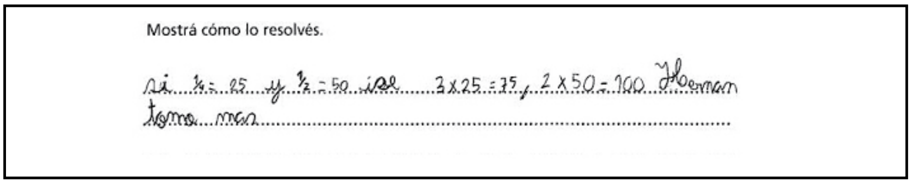
Bruno Hernan

3x250=750 500x2=1000

Si 1/4 l son 250 ml Y 500 l son 1/2 ml

Rta:“El que tomó más jugo fue Hernán

Ejemplo 49



Mostrá cómo lo resolvés.

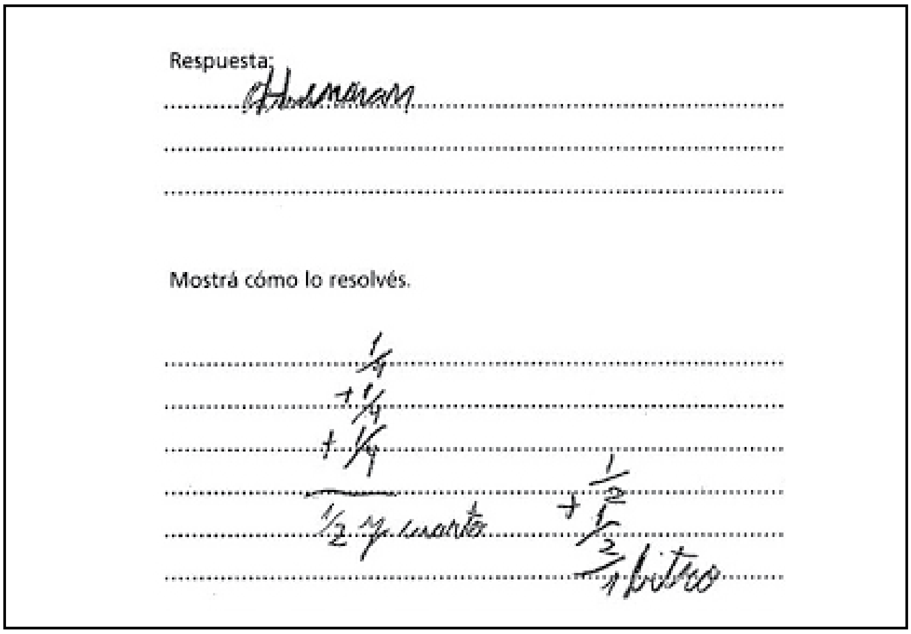
si 1/4 = 25 y 1/2 = 50 ise 3 x 25 = 75 y 2 x 50 = 100 Hernan tomo mas

En este ejemplo el alumno realizó la equivalencia de 1/4 y 1/2 podríamos suponer que tomó como entero a 100, es por eso que 1/4 lo representa con 25 y 1/2 con 50.

Los niños tienen algunos conocimientos relacionados con la medida debido a que la utilizan en la vida diaria, por ejemplo es posible que se apoye en conocimientos escolares o extraescolares acerca del uso del dinero (monedas de 25 y 50 centavos) o bien sobre medidas de longitud (25 y 50 centímetros o metros).

Respuestas parcialmente correctas

Ejemplo 50



Respuesta: Hernan

Mostrá cómo lo resolvés.

1/4
+1/4
+1/4
1/2 y cuarto

1/2
+1/2
1 litro

En este ejemplo el alumno realizó la suma de fracciones apoyándose en cálculos conocidos como (½ + ½) y (¼+¼). Al sumar los cuartos, expresó el resultado como ½ y ¼.

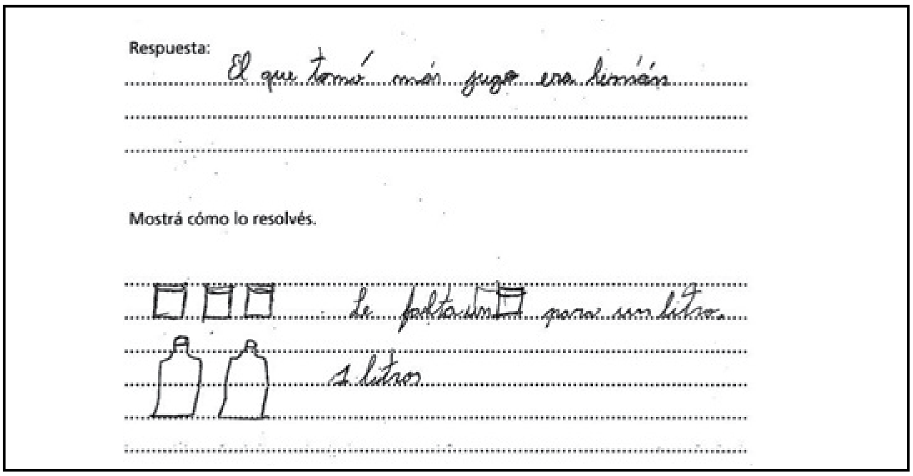
Una de las posibilidades para interpretar la manera en que utilizó estos resultados en la comparación podría ser que haya identificado que falta un cuarto más para que Hernán tome lo mismo que Bruno, o simplemente sepa que aún no llegó a formarse un litro.

Estas respuestas nos dan la pauta de que en las estrategias utilizadas por los niños en esta etapa de la escolaridad, un punto de apoyo posible suele ser la comparación con el entero.

Volviendo a este ejemplo, al sumar la cantidad de jugo que tomó Hernán nos da un entero, pero al sumar la cantidad de jugo que tomó Bruno falta un cuarto para llegar al entero, si lo considerásemos como 4 de ¼ o como 2 de ½. Por lo tanto es posible que este niño supiera que Hernán tomó más por llegar al entero, (1 litro ó 2/2).

En las próximas respuestas, se observan ejemplos de estos procedimientos, vinculados con calcular "lo que falta para un litro" o "completar un entero", desde la gráfica y la fundamentación.

Ejemplo 51


Respuesta: El que tomó más jugo era hernán

Mostrá cómo lo resolvés.

Le falta un para un litro.

1 litros

En este ejemplo, el alumno le dio al problema un sentido de complemento, apoyando su conclusión tanto con un gráfico cuanto con un breve texto.

Aunque no muestre numéricamente como llegó a una conclusión, graficó lo que Hernán y Bruno tomaron, y en la explicación refirió a lo que le falta para completar un litro en un caso, cuestión que le permite realizar la comparación y verificar por qué el otro tomó más (" 1 litro").

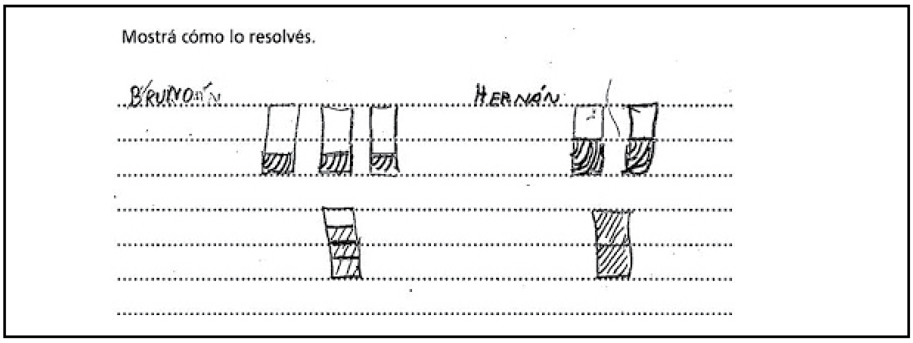
Esta respuesta, si bien no es convencional en términos de fracciones, comunica que con dos botellas se arma un entero y que con cuatro vasos, también.

Resulta imprescindible que los docentes generen espacios de debate en las clases de matemáticas sobre cómo registrar un argumento o una fundamentación apoyada en lo matemático.

Un trabajo de construcción de argumentos que den cuenta de las razones por las cuales se proponen ciertas afirmaciones, representaciones o procedimientos, podrá ir enriqueciéndose al incorporar progresivamente nuevos conocimientos matemáticos. Los niños pueden producir escrituras personales si se les da la oportunidad de elaborarlas y desplegarlas en la clase.

Otro punto de apoyo importante en las resoluciones encontradas fueron las representaciones gráficas.

Ejemplo 52



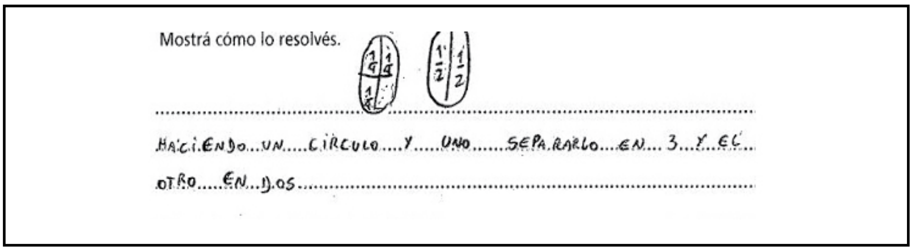
En este ejemplo podemos advertir que el alumno realizó el gráfico de los cuartos y medios por separado, para cada cuarto y cada medio, dibujó un entero.

Es posible que el niño haya considerado a cada entero como un recipiente de 1 litro, y que las marcas que se observan se refieran tanto a la cuarta parte como la mitad de cada uno.

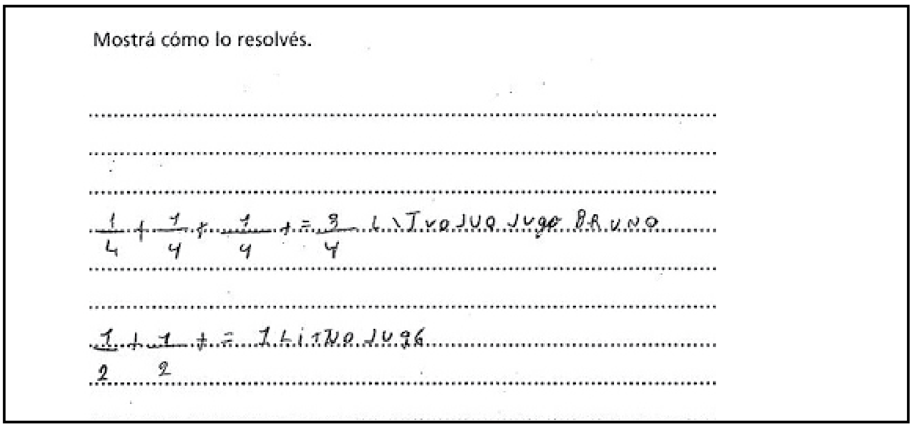
El enunciado del problema plantea una comparación entre vasos con una capacidad de ¼ y botellas de ½ litro, por lo que resulta interesante la lectura de esta representación. Es posible que los primeros gráficos para Bruno (¼, ¼, ¼) y (½, ½) para Hernán los haya realizado en reemplazo de la escritura fraccionaria y las segundas representaciones, sean el resultado, ¾ y 1 litro respectivamente.

En el próximo ejemplo, el entero es representado en un sólo gráfico y los vasos están "incluidos" como porciones de él dividiendo un entero en cuartos y el otro en medios. Es posible que este niño cuando se refirió a "separarlo en 3", haya pensado en los ¾ siendo este tres la cantidad de vasos tomados ya que en la representación el entero está correctamente divido en cuartos.

Ejemplo 53

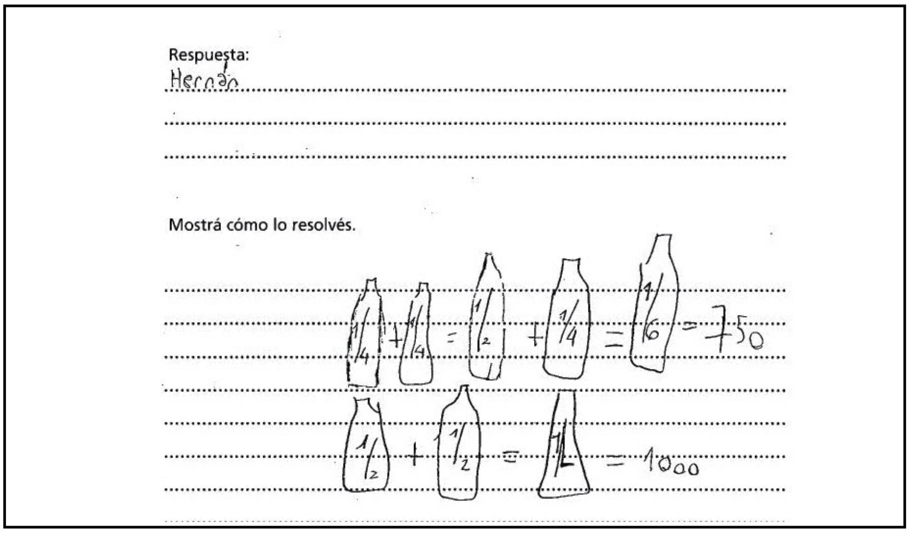


Ejemplo 54



En este ejemplo el alumno quizás a utilizado el algoritmo convencional, o alguna escritura que ya tenga "guardada" en su memoria que 3 de ¼ se escribe ¾ y que ½ + ½ es 1, y nunca usó ningún algoritmo

Ejemplo 55



En este ejemplo la respuesta y el procedimiento son correctos, aunque se observa un error de cálculo y en el uso del signo igual.

El alumno se apoyó en cálculos conocidos, ½ + ½ = 1litro y en ¼ + ¼ = ½, pero al adicionar el otro cuarto es probable que haya sumado los denominadores y por ello haya aparecido 1/6 como resultado, aunque al expresarlo con números naturales, obtiene "750" posiblemente apoyado en la relación "tres de ¼ equivalen a 750".

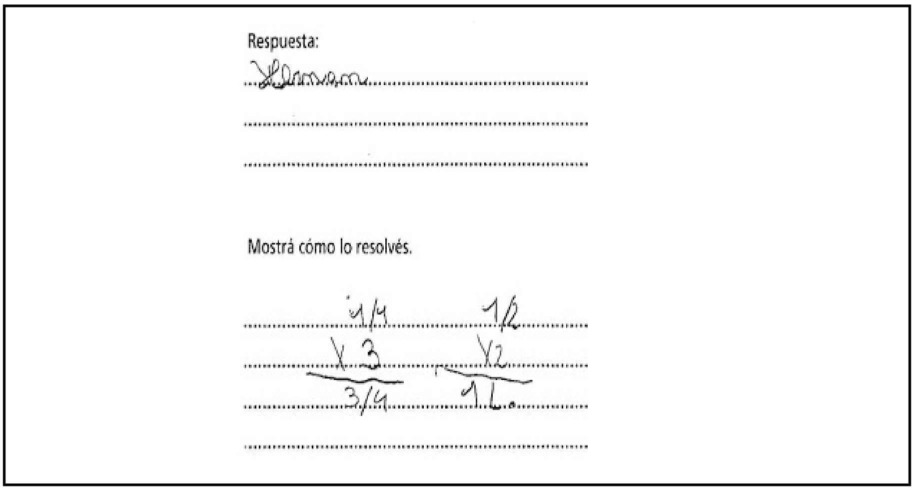
El resultado 1/6 (para la suma ½ + ¼) puede ser un error frecuente en los niños al comienzo, debido a la concepción de que las fracciones son números separados con los que se opera independientemente. Lo notable es que este alumno lleva el resultado al campo de los naturales y esto nos permite visualizar que ha operado correctamente.

> *"El estudio de los números racionales, (…) su abordaje desembocará en un cambio fundamental con respecto a la noción de número que tienen los niños hasta el momento, ya que algunas "certezas" elaboradas en el Primer Ciclo a partir del estudio de los números naturales, y que fueron válidas en ese campo numérico, se vuelven "erróneas" cuando las quiere extender a los números racionales"*[17]

En el próximo ejemplo se puede observar cómo el alumno resolvió el problema multiplicando una fracción por un número natural pero encolumna las operaciones con la forma más utilizada en números naturales, probablemente habituado a realizar cuentas durante el primer ciclo.

[17] *Matemática 4, Serie Cuadernos para el aula (2006) Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, Ministerio de Educación de la Nación*

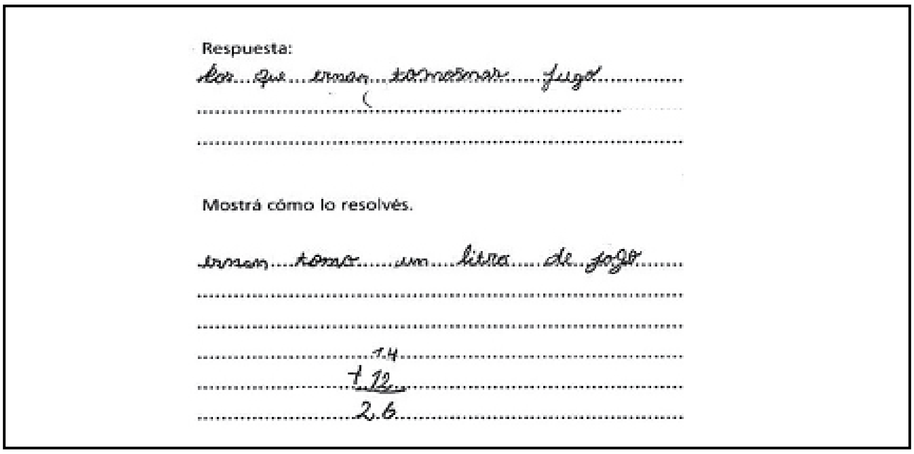
Ejemplo 56


Respuesta:
Hernan

Mostrá cómo lo resolvés.
1/4 1/2
x 3 x2
3/4 1L.

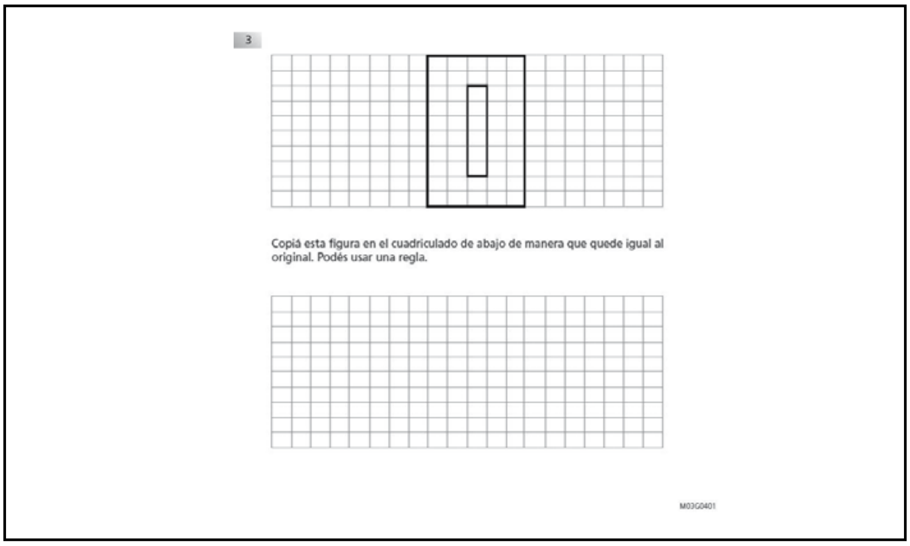
El próximo ejemplo observamos una respuesta incorrecta, donde se muestra que aún no ha "quebrado" con ciertas ideas que permitan diferenciar el funcionamiento de los números naturales y las fracciones ya que "convierte" en 14 y en 12 a ½ y a ¼ para sumar.

Ejemplo 57


Respuesta:
los que ernan tomesmar jugo

Mostrá cómo lo resolvés.
ernan tomo un litro de jogo
14
+12
26

Copiado de figuras



Contenido:	Geometría y Medida
Capacidad cognitiva:	Comunicación en Matemática
Desempeño:	Copiar una figura simple con modelo presente y en papel cuadriculado.

La resolución de esta actividad de copiado requiere realizar un análisis de una figura compuesta por dos rectángulos.

Tanto las figuras elegidas, cuanto el tipo de papel que se presenta para efectuar la copia, son las variables[18] que se han considerado a los efectos de favorecer la resolución. La consigna ofrece la posibilidad de usar regla como recurso de apoyo.

Dado que la actividad tiene algunas restricciones, ya que no se puede calcar o superponer el modelo y la copia, los estudiantes deben encontrar una forma de verificar si han seguido una serie de acciones para obtener una figura "igual" a la del modelo ofrecido.

Además, necesitan preguntarse sobre aquellas cuestiones que son relevantes para el copiado, como por ejemplo la posición de un rectángulo con respecto al otro.

[18] Consideramos variables la elección del papel cuadriculado, en lugar de liso y a los rectángulos, como figura en lugar de otras más complejas a la hora de copiar.

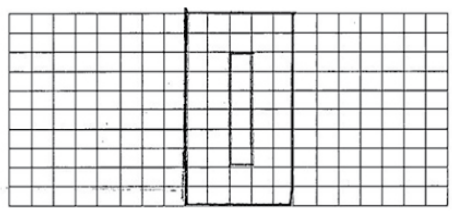
Reproducir estas figuras sobre la hoja cuadriculada los lleva a establecer ciertas relaciones, que requieren de "anticipaciones" implícitas, por ejemplo tener en cuenta cuántos cuadraditos (o tal vez centímetros, si es que recurren a usar regla) mide cada lado de los rectángulos y cómo "doblan" los lados.

Marcar las "puntas" o vértices de cada rectángulo antes de trazar las líneas que representan los lados o apoyarse en los cuadraditos dibujados para lograr trazos más o menos rectos puede funcionar como estrategias para ir controlando si la copia "contesta" esas preguntas, ajustándose al modelo original en mayor o menor medida.

A continuación presentamos algunos ejemplos donde un 71,2% de una muestra de 15208 de alumnos resolvió la actividad de forma correcta mientras que sólo el 4,5% respondieron a la situación planteada de forma incorrecta.

Respuestas correctas

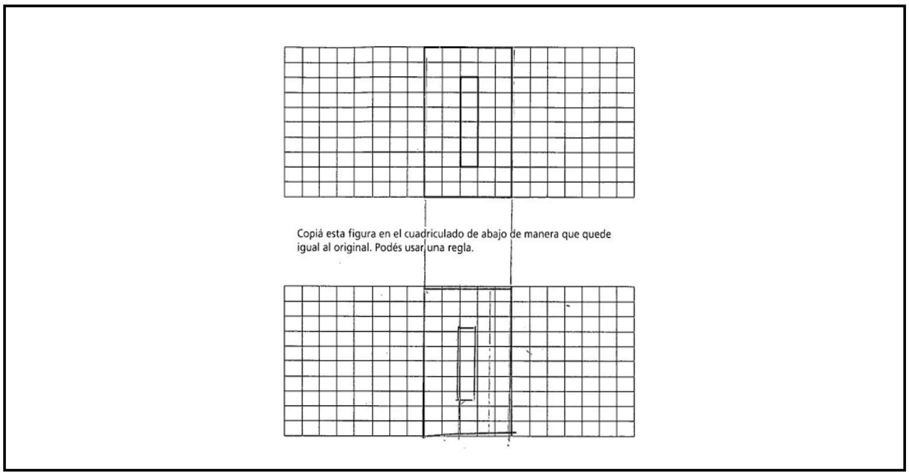
Efectuar una copia precisa requiere controlar las relaciones entre los elementos que componen la figura. Es necesario considerar la cantidad de cuadraditos de los lados de cada rectángulo, y la cantidad de cuadraditos que quedan dentro del rectángulo más pequeños y a su alrededor, lo que puede observarse en la siguiente respuesta.



Otros alumnos utilizaron estrategias que tal vez, no tomaran la medida de los lados como dato para realizar la copia.

En la respuesta presentada a continuación, puede observarse la marca del trazo de uno de los lados del rectángulo mayor que resultaba ubicada a una distancia del lado opuesto menor (casi 4 cuadraditos en lugar de 5). Es probable que el alumno, habiendo advertido que la longitud del lado menor resultaba incorrecta, haya recurrido a "prolongar" los lados del rectángulo mayor, como estrategia para verificar que la longitud de los lados de la figura copiada fuera correcta, sin recurrir a la medición.

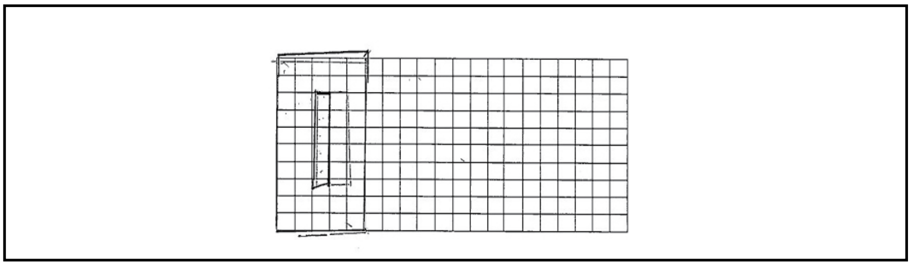
Ejemplo 58



Respuestas parcialmente correctas

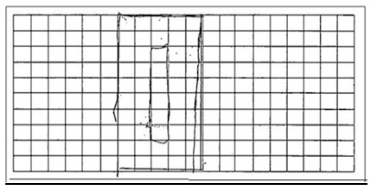
Hemos encontrado un 23,4% de respuestas, en las que aunque los alumnos realizaron la copia confundiendo la medida de algunos de los lados de algunos de los rectángulos, (por lo que varió su ubicación relativa), la copia conservó ciertas características de las figuras, como cantidad de lados rectos, y la posición en la hoja de ambos rectángulos.

Ejemplo 59



Ejemplo 60

En el siguiente ejemplo, se aprecian diferentes trazos que parecen dar cuenta de ajustes realizados hasta lograr una copia "igual" al modelo, resultando el último trazo realizado con regla, lo que evidencia que la longitud y la posición de ese lado fueron revisadas. Incluso aquí se ven puntitos sobre algunos cuadraditos, marca de que el alumno que lo hizo contó cuánto separarse del borde para construir el rectángulo interior (suponiendo que empezó por el exterior). También en el rectángulo interior parece haber una marca como si lo hubiera agrandado un cuadradito más (en la parte de abajo).

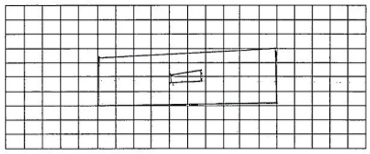


Respuestas incorrectas

A continuación presentamos algunos ejemplos en los que es posible pensar que los alumnos no hayan tenido en cuenta algunas relaciones a la hora de realizar correctamente la copia, o que no hayan recurrido a medir para obtener la longitud de los lados de una o dos de las figuras, obteniendo una composición inexacta al haber "rotado" la posición en la hoja.

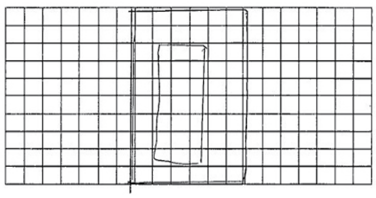
En este caso, puede apreciarse que la copia está completa, ambas figuras tienen pares de lados de diferente longitud, tienen algunos ángulos rectos.

Ejemplo 61



En el siguiente ejemplo, el rectángulo mayor tiene un cuadradito menos de ancho que el original, pero el más pequeño parece "desplazado" hacia la izquierda y abajo, y con una longitud de tres cuadraditos en vez de uno en los lados menores.

Ejemplo 62



Propuestas para trabajar en el aula en el Segundo Ciclo de Escolaridad Primaria

Las siguientes actividades no pretenden ser una secuencia, sino actividades que podrían ayudar a reflexionar sobre la enseñanza en segundo ciclo de contenidos vinculados a algunos aspectos analizados en este documento tales como: El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales en situaciones problemáticas que requieran:[19]

- Operar con cantidades expresadas con fracciones y decimales para calcular dobles, triples, mitades, tercios, sextos…
- Analizar la relación y equivalencia entre las partes sombreadas de una figura.
- Operar cantidades expresadas con fracciones evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Interpretar y comparar cantidades como parte de un entero.

Proponemos una serie de actividades que incluyen un juego, concibiéndolo como motor para promover un trabajo matemático en el que las reglas acordadas y compartidas desde el inicio, permitan ponen en escena decisiones reflexionadas sobre los conocimientos necesarios para jugar, dando argumentos y validando esas decisiones, lo que permitirá a los alumnos durante y a posteriori avanzar en la elaboración de conclusiones y de nuevos conocimientos.

Estas actividades proponen el abordaje de algunos significados de las fracciones sin pretender agotarlos, tales como:

Magnitudes discretas
Relación parte-entero
Vínculo razón, proporción y porcentaje
La fracción como operador de un conjunto

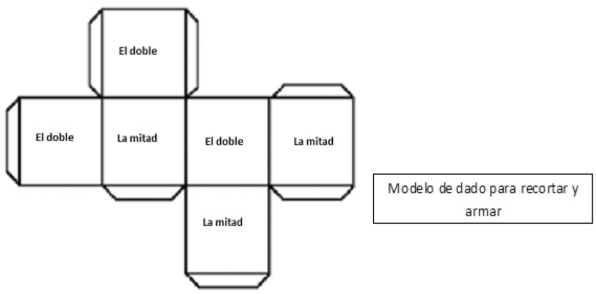
[19] *Ministerio de Educación de la Nación, Núcleo de Aprendizajes Prioritarios, 2 ciclo EGB/Nivel primario, Matemática, 2005.*

Actividad I

Cadena de "Dobles y mitades"

La actividad consiste en realizar las acciones que solicita el dado, respecto al número que surja de la elección al azar de las fichas recortables que muestra el modelo e ir anotando los resultados en hoja aparte, para luego ser debatidos.

Ejemplo



Ejemplo

Para iniciar el juego deberán tener una cierta cantidad de copias de las siguientes fichas recortables, acordes a la cantidad de posibilidades que se le quiera dar.

½				½			
¼		¼		¼		¼	
$^1/_8$	$^1/_8$	$^1/_8$	$^1/_8$	$^1/_8$	$^1/_8$	$^1/_8$	$^1/_8$

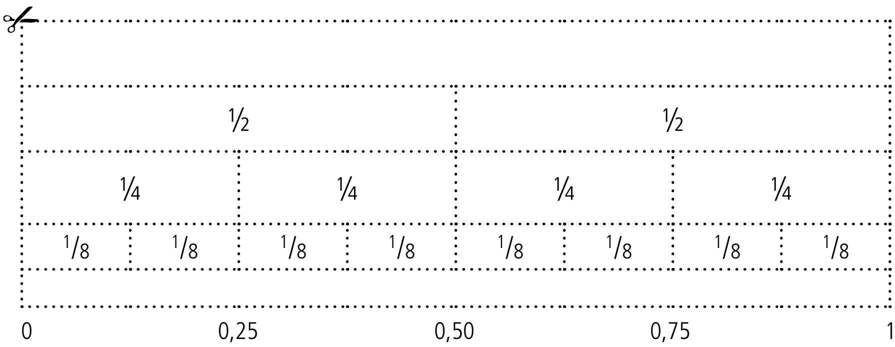
Reglas generales del juego:

Antes de comenzar el juego, se recortarán las piezas correspondientes a dos fichas recortables iguales. Todas estas piezas se colocarán en una caja. También se recortará y armará el dado que se muestra al inicio.

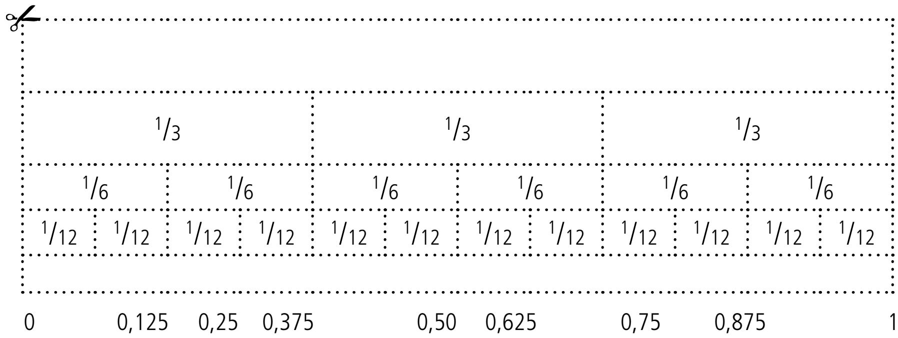
- El primer jugador seleccionará una pieza de 1/4 o de 1/2.
- El segundo jugador, ubicado a su derecha, comienza el juego. Arroja el dado y deberá utilizar las fichas que crea conveniente para cumplir la consigna que indica el dado. Estas proponen trabajar con relaciones tales como "el doble de" y "la mitad de".
- Las piezas que no fueron utilizadas por el segundo jugador serán reutilizadas por los siguientes jugadores.
- El siguiente jugador tira el dado y vuelve a sacar de la caja las piezas que le sirvan (a su criterio) para componer el valor que indica el dado respecto al resultado del compañero anterior. Repite la operación del primer jugador, devolviendo a la caja las fichas no utilizadas.
- El juego termina cuando, con las fichas que quedan en la caja, no se puede cumplir la consigna del dado.

De acuerdo al nivel de complejidad con que se quiera trabajar, puede utilizarse una "red" de fracciones que abarque:

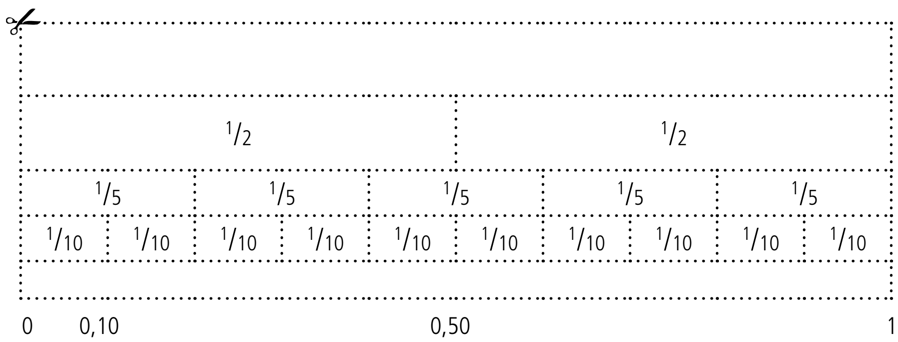
Medios, cuartos y octavos



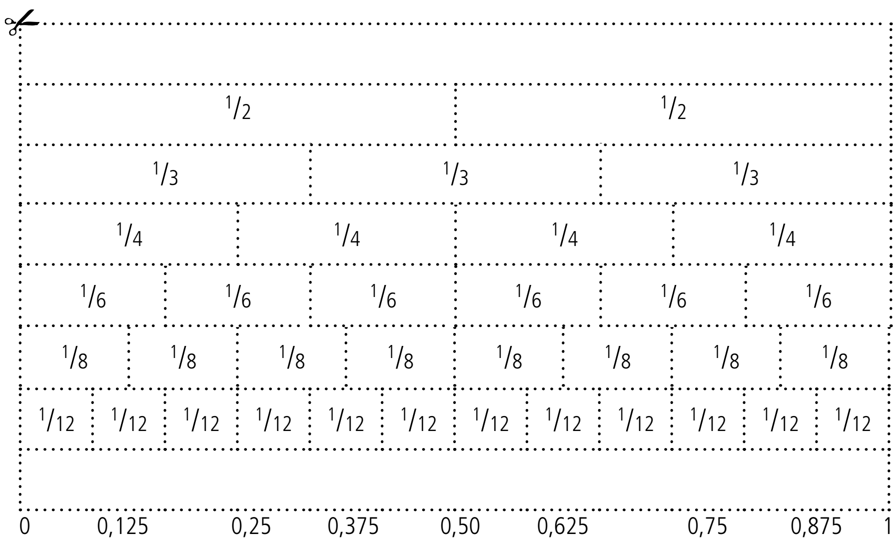
Tercios, sextos y doceavos.



Medios, quintos y décimos.



Medios, tercios, cuartos, sextos, octavos y doceavos.



Equivalencias entre las fracciones elegidas con porcentajes y decimales.

<table>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="4">0,50</td><td colspan="4">$^{1}/_{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">25%</td><td colspan="2">$^{1}/_{4}$</td><td colspan="2">0,25</td><td colspan="2">$^{1}/_{4}$</td></tr>
<tr><td>0,125</td><td>$^{1}/_{8}$</td><td>$^{1}/_{8}$</td><td>0,125</td><td>$^{1}/_{8}$</td><td>$^{1}/_{8}$</td><td>12,5%</td><td>$^{1}/_{8}$</td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
</table>

0 0,25 0,50 0,75 1

<table>
<tr><td colspan="24"></td></tr>
<tr><td colspan="12">$^{1}/_{2}$</td><td colspan="12">0,50</td></tr>
<tr><td colspan="8">$^{1}/_{3}$</td><td colspan="8">$^{1}/_{3}$</td><td colspan="8">$^{1}/_{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$^{1}/_{4}$</td><td colspan="6">0,25</td><td colspan="6">$^{1}/_{4}$</td><td colspan="6">0,25</td></tr>
<tr><td colspan="4">$^{1}/_{6}$</td><td colspan="4">$^{1}/_{6}$</td><td colspan="4">$^{1}/_{6}$</td><td colspan="4">$^{1}/_{6}$</td><td colspan="4">$^{1}/_{6}$</td><td colspan="4">$^{1}/_{6}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">0,125</td><td colspan="3">0,125</td><td colspan="3">$^{1}/_{8}$</td><td colspan="3">12,5%</td><td colspan="3">$^{1}/_{8}$</td><td colspan="3">0,125</td><td colspan="3">$^{1}/_{8}$</td><td colspan="3">12,5%</td></tr>
<tr><td colspan="24"></td></tr>
</table>

0 25% 0,50 $^{3}/_{4}$ 100%

Luego de la actividad, se socializarán las producciones, justificando cada composición.

La organización de un momento para comunicar y argumentar cómo llegaron a formar el doble de… o la mitad de… no sólo permitirá intercambiar determinados aspectos de las relaciones doble–mitad en el campo de los racionales, sino también las equivalencias, al confrontarse diferentes formas de llegar a un determinado número.

Ejemplo: 1/2 (1/4+1/4), (1/8+1/8+1/4), (1/8+1/8+1/8+1/8)

Actividad 2

Entero, ¿estás ahí?

Se puede proponer el análisis de composiciones ofrecidas por el docente donde deberán justificar con V (verdadero) o F (falso) si se compusieron o no y por qué.

Ejemplo: 75% y ¼ = 1 entero
½ y ½ = 1 entero
¼ y $^1/_8$ y 0,50 = 1 entero

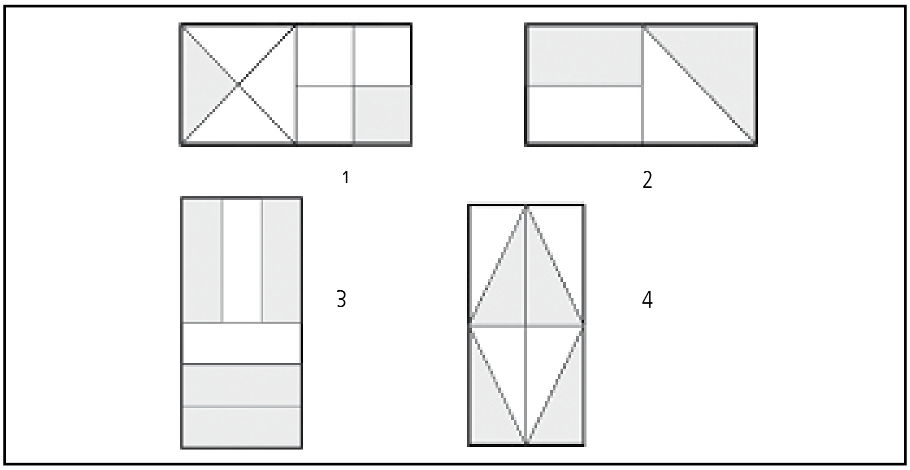
Actividad 3

Figuras sombreadas

En algunas ocasiones, proponemos actividades que apelan a representaciones gráficas donde el entero está dividido en partes iguales, y por ello suponemos que se visualiza "fácilmente" la relación entre las partes y el entero.

El análisis de figuras sombreadas donde haya que distinguir entre número de cortes y número de partes, permitirá analizar que ambos números no son necesariamente iguales.
Al mismo tiempo, favorecerá admitir que cada parte puede considerarse una nueva unidad y que el entero se forma con la unión de las partes.

Las figuras que se presentan a continuación se utilizarán para partir un entero en partes y analizar la relación entre las partes sombreadas, ofreciendo además la oportunidad de analizar cuáles de las diferentes figuras pueden tener una misma medida.



1) María dice que "en las figuras 2 y 4 las partes sombreadas ocupan la misma superficie. Pedro dice que no es así, porque en la figura 4 "hay más cantidad de partes sombreadas". Discutí con tu compañero y expliquen si están de acuerdo con alguno de ellos y por qué.

2) En parejas, encuentren y señalen

a. Dos figuras que tengan la misma área sombreada.
b. La figura de menor área sombreada
c. La figura de mayor área sombreada
d. La figura que tenga sombreados 8/12

3) Dibujen

a. Una figura de área equivalente a la parte sombreada de la figura 1.
b. Una figura que tenga la mitad del área sombreada con respecto a la figura 3.

Los problemas de medida ponen en juego un aspecto diferente de las fracciones. La comparación de áreas trata de establecer la cantidad de veces que una unidad de medida "entra" en el objeto a medir, pero requiere distinguir entre la medida y la forma.

Actividad 4

El siguiente problema puede usarse como motivador para trabajar la fracción como operador de un conjunto

Autitos de colores

En una caja hay 30 autitos. Las dos quintas partes son azules. ¿Cuántos autitos no son azules?

La resolución del problema requiere subdividir la colección de autitos en 5 subconjuntos de 6 autitos cada uno.

Es posible que algunos niños dividan en subconjuntos de 5 autitos, teniendo en cuenta que se alude a "quintos", y por ello son 10 los autitos azules, mientras que otros dividan correctamente en 5 subconjuntos pero que tomen dos elementos de cada subconjunto, considerando que el numerador se refiere a elementos en lugar de subconjuntos de autitos azules.

Será conveniente intercambiar diferentes soluciones, con el propósito de revisar y discutir sobre el significado de numerador y denominador, favoreciendo la construcción de significado de la fracción como operador.

A partir de lo elaborado se proponen distintos problemas

Para partir cabezas

De los siguientes problemas, marquen cuáles tiene o no solución, y justifiquen cada respuesta.

a) De los 36 alumnos de un grupo, la mitad practica deportes, 10 participan de un taller de teatro y ¼ asiste a coro. ¿Cuántos alumnos asisten a cada actividad?
b) Santiago viajó a su pueblo natal. Las ¾ partes de un día, viajó en micro y medio día en tren. ¿Cuánto duró el viaje?
c) Para pintar una casa, se compraron 60 litros de pintura. Según la distribución de los ambientes, del total de litros, se usaron ¼ de color verde, 2/6 de color naranja y ½ de color blanco. ¿Cuántos litros se usaron de cada color?

Comenzar a estudiar fracciones en segundo ciclo requiere recuperar aquellas cuestiones que pudieron ser abordadas durante el primer ciclo o que fueron trabajadas con anterioridad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

• ASTOLFI, JEAN PIERRE (2004) "El "error", un medio para enseñar", Díada/SEP Biblioteca para la actualización del Magisterio, México.

• BROITMAN, CLAUDIA. (comp.) (2013) Matemáticas en la escuela primaria I, Bs. As., Editorial Paidós.

• CHARLOT, BERNARD. (1986)"La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas", versión mimeografiada de la conferencia pronunciada en Cannes.

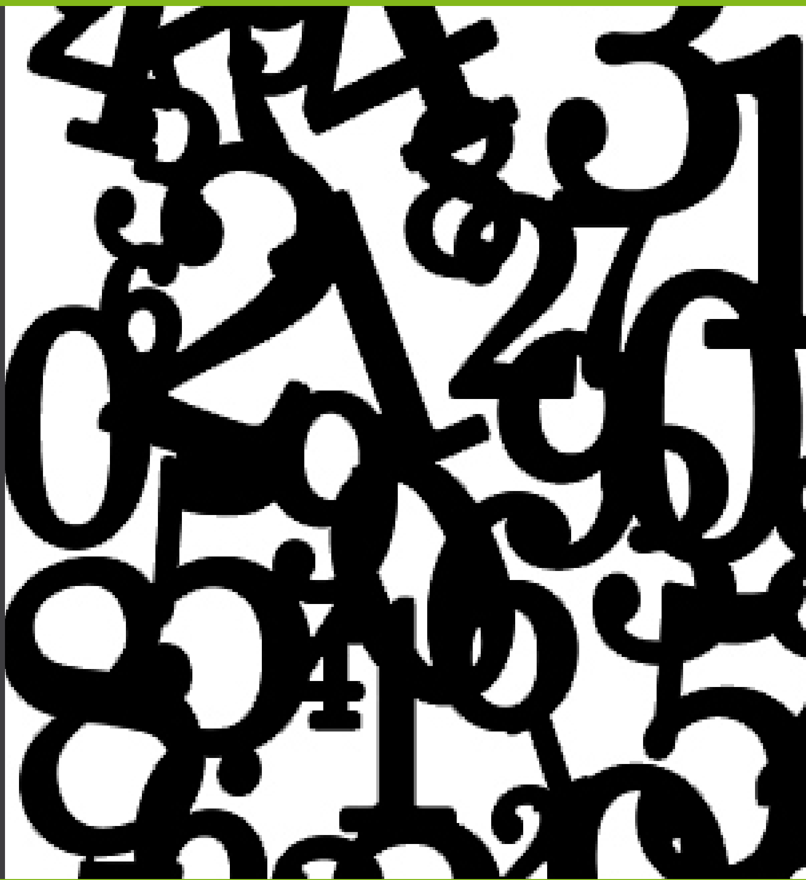
• ITZCOVICH, HORACIO. (2007) La Matemática escolar, Buenos Aires, Editorial Aique.

• MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE LA NACIÓN (2014), "Recomendaciones metodológicas para la Enseñanza" . Matemática.
• Educación Secundaria-ONE 2013", Diniece, (en prensa)

• PANIZZA, MABEL. (comp) (2003) Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas, Buenos Aires, Paidós.

• PONCE, HÉCTOR Y QUARANTA, MARÍA EMILIA, (2006) "Las fracciones" en Enseñar matemática en la escuela primaria, Buenos Aires, Ediciones Tinta Fresca.

• URQUIZA, MÓNICA. (2007) "Medida" en Enseñar Matemática en la escuela primaria". Ed. Tinta Fresca.



ARGENTINA
NOS INCLUYE

DiNIECE Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa