RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Secundaria - ONE 2013
Pruebas de 2°/3° año y 5°/6° año de la Educación Secundaria

ONE 2013

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

Presidenta de la Nación
Dra. Cristina Fernández de Kirchner

Jefe de Gabinete de Ministros
Cdor. Jorge Milton Capitanich

Ministro de Educación
Prof. Alberto E. Sileoni

Secretario de Educación
Lic. Jaime Perczyk

Subsecretaria de Planeamiento Educativo
Prof. Marisa del Carmen Díaz

Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa
Dra. Liliana Pascual

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Secundaria - ONE 2013
Pruebas de 2°/3° año y 5°/6° año de la Educación Secundaria

ONE 2013

Departamento de Evaluación de la Calidad Educativa:

Coordinación:
Mg. Mariela Leones

Equipo del Área de Matemática:
Prof. Liliana Bronzina
Prof. Pilar Varela
Lic. Nora Burelli
Prof. Sabrina Crichigno
Ing. Graciela Baruzzi

Técnico-Pedagógica:
Prof. Natalia Rivas

Lectura Crítica y Aportes
Prof. Verónica Grimaldi

Agradecemos la lectura y los comentarios de:
Prof. Miriam Valeria Hernández. Colegio Jesús Obrero, Merlo, Prov. de Buenos Aires.

Prof. Antonio Gabriel Ernesto Pocovi. Instituto José de San Martín, Merlo, Prov. de Buenos Aires. Instituto Domingo Faustino Sarmiento, Prov. de Buenos Aires.

Prof. Sandra Beatriz San Miguel. Instituto Modelo Almafuerte, Merlo, Prov. de Buenos Aires. EEM N° 16, Merlo, Prov. de Buenos Aires.

Prof. Diego Hernán Malerba. Instituto José Hernández, C.E.F, San Antonio de Padua, Prov. de Buenos Aires.

Áreas Curriculares, Dirección Nacional de Gestión Educativa. Ministerio de Educación de la Nación

Diseño y Diagramación:
Coordinación: Noelia Ruiz
Equipo Responsable:
Karina Actis
Juan Pablo Rodriguez
Coralia Vignau

Este documento se terminó de elaborar en julio de 2014.

ÍNDICE

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA- EDUCACIÓN SECUNDARIA-ONE 2013. PRUEBAS DE 2°/3° AÑO Y 5°/6° AÑO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

INTRODUCCIÓN

Las pruebas de matemática evaluaron en el 2013 la totalidad de estudiantes que finalizaban la Educación Secundaria y una muestra de los que cursaban 2°/3° año de ese nivel.

Las mismas tuvieron como finalidad determinar el estado de situación de los alumnos de diferentes jurisdicciones del país en relación con algunos contenidos y capacidades cognitivas del área.

¿Cómo estuvieron constituidas las pruebas?

Es importante considerar que son pruebas masivas, es decir, se aplican a la totalidad o muestras muy grandes de alumnos y que, por lo tanto, tienen una estructura que les es propia. El análisis de las mismas puede complementar la información obtenida de las evaluaciones realizadas día a día por los docentes en su trabajo de aula.

Las pruebas de matemática, tanto la de fin de la Educación Secundaria como la de 2°/3° año, estuvieron constituidas por 90 actividades cerradas o ítems de opción múltiple, con cuatro opciones de respuesta cada uno, y 6 actividades o ítems de respuesta abierta a desarrollar.

Se conformaron seis bloques, con 15 items cerrados cada uno. Dos bloques formaron un cuadernillo con un total de 30 ítems. Los bloques rotaron su posición en los distintos cuadernillos. De esta manera cada alumno contestó 30 ítems cerrados de un cuadernillo.

En cuanto a las actividades de respuesta a desarrollar de la evaluación de 2013 se incluyeron, para los alumnos que terminan la Educación Secundaria, 3 ítems que evalúan situaciones geométricas y de medida y otros 3 que corresponden al contenido Funciones. En 2°/3° año formaron parte de la prueba 3 ítems abiertos de Geometría y Medida y otros 3 de Números y Operaciones.

La inclusión de actividades de respuesta abierta (en cuadernillo aparte), permitió evaluar los procesos, los recursos y conocimientos puestos en juego por los alumnos para dar cuenta de un procedimiento o de una estrategia de resolución elegida y de su relación con la respuesta presentada.

Con el fin de atender especialmente al procedimiento de resolución y no solo al resultado, las actividades de respuesta abierta fueron corregidas por docentes debidamente capacitados de distintas jurisdicciones del país. Para garantizar la objetividad en la corrección, los docentes utilizaron una guía elaborada para tal fin por el equipo pedagógico de la DINIECE, y de esta manera, clasificaron las respuestas en cuatro categorías contempladas en la grilla de corrección: correcta, parcialmente correcta, incorrecta y en blanco (omitida)[1].

Habiendo accedido a las respuestas dadas por los alumnos, hemos seleccionado algunas que por sus características, nos invitan a reflexionar no sólo sobre su nivel de conceptualización, sino también sobre sus posibilidades concretas de resolución en función de los contenidos que se ponen en juego. Es así como hemos elegido para el análisis las respuestas de los alumnos a las actividades con que fueron evaluados en dos contenidos : Geometría y Medida (en 5°/6° y 2°/3° años) y Funciones (en 5°/6° año).

Los ítems abiertos nos aportan, además, una variedad de datos acerca de los recursos que los alumnos están en condiciones de utilizar en esta etapa de su escolaridad secundaria para describir los procedimientos utilizados en la resolución y la racionalidad desplegada, cuestión que da cuenta del tipo de trabajo matemático con el que pudieron o no vincularse en su trayectoria escolar.

Por ello, este informe tiene como propósito compartir con ustedes algunas de las situaciones que los alumnos tuvieron que resolver y una serie de comentarios y análisis realizados sobre los conocimientos y los procesos cognitivos que están en la base de los mismos.

Asimismo, aunque los fines y las características de esta prueba difieren en gran medida de los utilizados cotidianamente en las aulas, no dudamos puedan aportar información útil sobre las dificultades y logros más frecuentes en los alumnos, y al mismo tiempo, proveer algunas sugerencias para trabajar en clase, con el fin de enriquecer la tarea pedagógica, pudiendo ser adaptadas por los docentes a su contexto y a la realidad de sus alumnos y de su escuela.

A continuación, analizaremos problemas que corresponden al desempeño de los alumnos del 2°/3° año y de Fin de Educación Secundaria de 2013.

.

[1] *Ver Anexo para ejemplo de una grilla de corrección.*

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES EVALUADAS

En esta ocasión hemos decidido presentar y analizar, conjuntamente, las actividades abiertas y sus resoluciones correspondientes a los dos niveles educativos evaluados.

El lugar de la geometría y la medida en la Escuela Secundaria

La enseñanza de los contenidos y prácticas del eje Geometría y Medida, nos plantea interesantes desafíos a los docentes de la escuela media. Si bien no podemos ignorar los estrechos vínculos entre estos dominios de la matemática, sin dudas conforman "zonas" de esta disciplina con objetos, representaciones y prácticas propias en cada caso.

Durante mucho tiempo las propuestas de enseñanza acercaron excesivamente el espacio geométrico –ideal, matematizado- con el espacio físico -vinculado a la percepción-. Esta cercanía redujo las prácticas geométricas a actividades asociadas a la medición y al cálculo, confundiéndose muchas veces el trabajo geométrico con prácticas empíricas y aritméticas.

Por otro lado, el excesivo protagonismo del álgebra en las propuestas de enseñanza ha provocado distorsiones sobre las actividades que se presentan, muchas de las cuales, bajo un ropaje geométrico, en realidad apuntan al trabajo algebraico como foco principal. En palabras de Itzcovich (2005): *"(…) en muchos casos, estos problemas apuntan a que un cierto contexto geométrico actúe como "decorado" para tal planteo y tal resolución de una ecuación, sin que se lleguen a establecer verdaderas interacciones entre estos dos dominios"*[2].

Las reflexiones anteriores no implican que sea necesario separar de manera tajante los dominios vinculados a la medida, la geometría y el álgebra. Por el contrario, se trata de reconocer sus diferencias para identificar que, en distintas propuestas, el foco estará puesto en ciertos objetos, ciertas representaciones y ciertas prácticas propias de alguno de ellos y, en muchos casos, pasible de ser vinculados con los otros. Esta distinción nos permite estar en mejores condiciones para elaborar y gestionar propuestas que se nutran de los recursos de estas tres zonas de la Matemática.

[2] *Itzcovich, H. (2005): Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. Buenos Aires. Libros del Zorzal.*

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS

Dentro de la diversidad de contenidos del eje Geometría y Medida que se trabajan en la escuela, se ha decidido evaluar a los alumnos de 5°/6° y de 2°/3° año en relación con cálculo de áreas.

Algunos de los ítems presentados, se refieren al cálculo de áreas de una composición de figuras. En ellos las resoluciones requieren, por un lado, analizar algunas propiedades de las figuras presentadas, y por otro, vincular ese análisis geométrico con la medida. En todos los casos, los enunciados presentan una figura de análisis.

Problema del área de una figura circular

Una de las actividades planteadas para los alumnos que finalizaban la Educación Secundaria fue la siguiente:

1 La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?

Mostrá cómo lo resolvés

Año:
5°/6° año de la Educación Secundaria Fin de Educación Secundaria
Contenido:
Geometría y medida
Capacidad Cognitiva:
Resolución de problemas
Desempeño:
Resolver un problema que involucra cálculo de área de figuras usuales.

Se trata de un problema que puede resolverse apelando a diferentes procedimientos.

Un tipo de estrategia de resolución consiste en la reorganización de las porciones que componen la figura total, apelando a la construcción de una nueva figura que permite verificar ciertas condiciones que el problema plantea, esto es

> *dar cuenta de que las tres partes involucradas "completan" un pequeño cuadrado y además,*
> *establecer que esa nueva figura tiene un área equivalente a la cuarta parte del área del cuadrado mayor*

Estas consideraciones permiten calcular el área de la parte sombreada, apoyándose en que la medida del lado del cuadrado mayor equivale al diámetro de la circunferencia mayor.

Otro tipo de procedimiento posible, implica calcular el área de cada una de las partes sombreadas, para luego sumarlas. En este caso, involucra

> *identificar las diferentes figuras geométricas que componen la figura total, analizar sus propiedades,*
> *establecer los datos necesarios para hallar el área de cada una de esas figuras parciales para finalizar obteniendo, por sumatoria, el área total.*

El primer tipo de procedimiento apela inicialmente a prácticas geométricas, operando sobre las figuras en juego –"cortando y pegando"- para obtener otras, y luego calcular el área de la nueva figura.

Resulta una estrategia muy económica en términos de cálculo, que solo opera sobre una expresión algebraica sencilla –la del área de un cuadrado-. Posibilita, además, obtener un resultado exacto: el área del cuadrado de lado 3 cm es de 9 cm^2.

El segundo tipo de procedimiento opera por separado sobre cada subfigura, implica la manipulación de expresiones algebraicas más complejas que requieren un tratamiento específico: por ejemplo, reconocer que se trata de un cuarto de corona circular, para dividir por 4 el resultado del cálculo del área de la corona.

Este tipo de procedimiento, con fuerte apoyo en el marco algebraico, está muy presente en las prácticas escolares usuales. La utilización de valores aproximados para la constante π, así como las sucesivas operaciones sobre valores decimales truncados, conducen en general a resultados que se aproximan al valor exacto del área de la figura.

El 43,77% de los alumnos que terminaban su Educación Secundaria omitieron esta actividad y 17,17% la resolvió correctamente.
Las siguientes son algunas resoluciones de alumnos de este grupo que utilizaron estrategias geométricas.

EJEMPLO N° 1

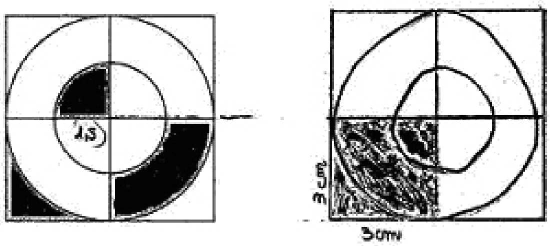
En este caso el alumno se apoya en el dibujo brindado, para ubicar en él el dato “radio de la circunferencia menor mide 1,5 cm”. Además, realiza uno nuevo en el que “mueve” las zonas sombreadas, que aparecen “reubicadas”. Esta operación, que utiliza de manera implícita la congruencia entre las figuras en juego, le permite establecer la equivalencia entre la superficie de las tres zonas sombreadas originalmente y la nueva.

Luego, calcula la medida del lado del cuadrado sombreado y, a continuación, su área. Si bien escribe “3 cm” y “3 cm” como medida de los lados, utiliza centímetros lineales para expresar la respuesta. Este error en el uso de unidades podría deberse a una distracción, o tener su origen en una escasa articulación entre el trabajo escolar realizado en torno a la medición, el significado de las unidades de superficie como el cm^2, y el cálculo de superficies[3].

En este sentido, muchos alumnos agregan las unidades a las partes del cálculo o a las respuestas una vez terminado el procedimiento, solo porque han identificado que en estos problemas se les solicita hacerlo, aún si no comprenden muy bien por qué. Sin embargo, la ausencia de un trabajo escolar sobre el significado de las unidades cuadradas para medir superficies provoca que los alumnos no dispongan de estrategias de control sobre estos agregados, más allá de su propia posibilidad para recordarlas de memoria.

3 *Hemos considerado correctas a este tipo de respuestas –aun si el uso de las unidades es erróneo-, cuando advertimos que la producción muestra un control del significado de la noción de área por parte del alumno en alguno de los marcos de trabajo –geométrico, aritmético o algebraico-.*

1 La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?

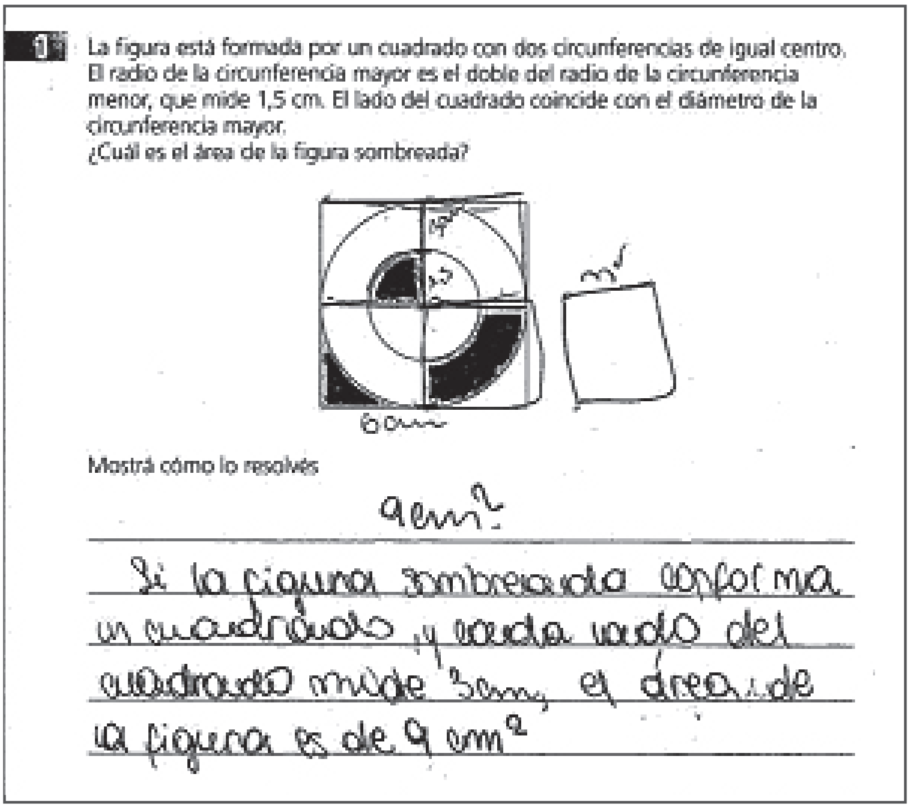


Mostrá cómo lo resolvés

1,5cm.2 = 3 cm
3cm.3cm= 9 cm

EJEMPLO N° 2

Veamos otro ejemplo en el que el alumno, como en el caso anterior, vuelca en el dibujo datos aportados por el enunciado, y otros calculados por él, como la longitud del lado del cuadrado mayor y del menor. En este caso, a la derecha del original dibuja un cuadrado de lado 3 cm, y escribe “9 cm^2”. Acompaña con un texto que explica este valor, así como el significado del dibujo del cuadrado de lado 3 cm que toma como referencia.



1 La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?

Mostrá cómo lo resolvés

9cm²

Si la figura sombreada conforma un cuadrado, y cada lado del cuadrado mide 3cm, el área de la figura es de 9 cm²

Rta: "Si la figura sombreada conforma un cuadrado y cada lado del cuadrado mide 3cm, el área de la figura es de 9cm^2".

Al igual que en el caso anterior, no se explicitan razones que justifiquen la congruencia de las figuras en juego. Ambos utilizan este conocimiento que probablemente les resulte "muy a la vista" en el dibujo, y por lo tanto no conciban la necesidad de explicarlo.

Resulta interesante reflexionar acerca de las posibilidades de trabajar en las clases sobre la producción de argumentos que validen ciertas propiedades que se utilizan de manera implícita, de manera de ir "más allá" de lo que el dibujo parece estar dejando a la vista.

Una parte importante del trabajo geométrico que la enseñanza debe favorecer, tiene que ver con la superación de la evidencia que parecen brindar las representaciones, como modo de trabajar con las figuras y no ya solamente con los dibujos.

En el procedimiento que presenta en su hoja, el alumno no escribe ni declara qué cálculo realiza o cómo lo realiza. Es probable que, gracias a la "sencillez" de los números propuestos, haya utilizado un cálculo mental. Esto sería menos probable si se hubieran propuesto valores decimales, números grandes o "no redondos".

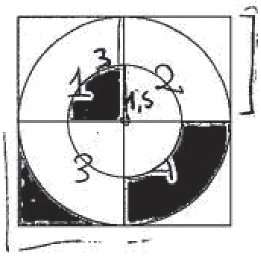
Esta cuestión nos permite pensar sobre la intención de enseñanza del docente a la hora de seleccionar los números que estarán en juego en el problema que va a proponer, y a la necesidad de analizar qué cuestiones se habilitan u obstaculizan a partir de dicha elección.

EJEMPLO 3

En este caso, vemos que el estudiante ha realizado ciertas marcas sobre el dibujo, las cuales cobran sentido cuando leemos el texto que adjunta a su respuesta. La numeración que propone sobre los cuadrados tiene, aparentemente, una finalidad de comunicación de su estrategia.

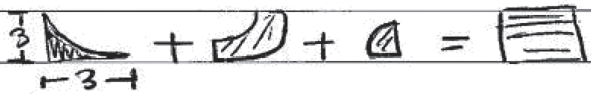
También agrega al dibujo un dato que se brinda en el enunciado, y otro que se infiere a partir de las propiedades de las figuras en juego.

La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

$\boxed{9\,cm^2}$



A ver.

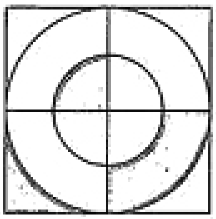
Dividí el wadrado en 4 ~~partes~~ cuadrados más chicos. Posto que los lados de dichos wadrados equivalen al radio del círculo grande (3, ya que el radio del círculo grande es el doble del pequeño, 1,5) sabemos que en el cuadrado "3", los dos lados rectos que pertenecen a la figura sombreada valen 3 cada uno. Ambas regiones de los cuadrados "1" y "4" sumadas equivalen a la parte no sombreada en el wadrado "3". Pr lo tanto, si sumamos todas las parte sombreadas obtendríamos un wadrado de las dimensiones del wadrado "3" ó 1,2, ya que el área de los mismos es 9 cm², la respuesta es esa.

M12G0448

Rta: "Dividí el cuadrado en 4 cuadrados más chicos. Puesto que los lados de dichos cuadrados equivalen al radio del círculo grande (3, ya que el radio del círculo grande es el doble del pequeños, 1,5). Sabemos que en el cuadrado "3", los dos lados rectos que pertenecen a la figura sombreada valen 3 cada uno.

Ambas regiones de los cuadrados "1" y "4" sumadas equivalen a la parte no sombreada en el cuadrado "3". Por lo tanto, si sumamos todas las partes sombreadas obtendríamos un cuadrado de las dimensiones del cuadrado "3" (ó 1,2,4) ya que el área de los mismos es 9 cm^2, la respuesta es esa".

1 La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

$r = 1{,}5$ cm $R = 3$ cm $d = 3$ cm $D = 6$ cm $l = 3$ cm $L = 6$ cm

$A_{OM} = \pi \cdot R^2 = 28{,}27$ cm^2

$A_{\square m} = l^2 = 9$ cm^2

$A_{Om} = \pi \cdot r^2 = 7{,}06$ cm^2

$St = [A_{\square m} - (A_{OM} : 4)] + (A_{Om} : 4) + \{A_{\square m} - [A_{\square m} - (A_{OM} : 4)]\} - (A_{Om} : 4)$

$9\,cm^2 - (28{,}27\,cm^2 : 4)] + (7{,}06\,cm^2 : 4) + \{9\,cm^2 - [9\,cm^2 - (28{,}27\,cm^2 : 4)]\} - (7{,}06$

$1{,}9325\,cm^2 + 1{,}7671\,cm^2 + 5{,}3\,cm^2 = 8{,}99\,cm^2$

$\simeq 9\,cm^2$

El área de la figura sombreada es de aprox 9 cm^2

Inicialmente presenta la respuesta (9 cm^2), y procede a continuación a explicar, a través de una representación no convencional, que ha "sumado" las partes sombreadas del dibujo y que de esa "suma" obtiene otra figura, un cuadrado.

Es interesante señalar que el alumno opera geométricamente, a pesar de utilizar una representación en formato cálculo, más cercana a lo aritmético. Al leer su explicación, queda claro que identifica la equivalencia entre distintas partes de la figura, e infiere que las tres partes sombreadas en cuadrados diferentes son lo mismo que las tres partes consideradas dentro de un mismo cuadrado.

La conclusión de que ese cuadrado tiene área 9 cm^2 se puede inferir del primer "término" de su "cálculo" con dibujos, en el que explicita que los lados miden 3 (cm). Igual que en el ejemplo 2, ésta parece ser –desde su punto de vista– la parte menos relevante de su procedimiento, la menos "digna" de merecer una explicación, quizás debido al alto grado de evidencia que tiene para él que un cuadrado de lado 3 cm tiene un área de 9 cm^2.

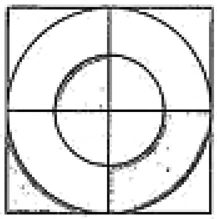
Una cuestión de interés en relación a esta estrategia tiene que ver con la elección que hace el estudiante de elaborar un texto escrito para explicar con detalle su manera de resolver.

Este texto no es una mera descripción de su procedimiento sino una argumentación acerca de las razones por las cuales ha tomado las decisiones que tomó, que involucran las relaciones geométricas en las que se apoyó. La construcción de este texto lo llevó, seguramente, a la necesidad de crear el código "1-2-3-4" para los cuadrados pequeños, y nos permite hipotetizar que este alumno a "ido y venido" varias veces entre el texto y el dibujo, pensando maneras efectivas de comunicar y validar su estrategia.

Otro grupo de resoluciones está conformado por procedimientos más vinculados al segundo tipo, es decir, aquellos que se centran en calcular las áreas de las tres figuras involucradas, y luego sumarlas.

EJEMPLO 4

1 La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

$r = 1{,}5\ cm \quad R = 3\ cm \quad d = 3\ cm \quad D = 6\ cm \quad l = 3\ cm \quad L = 6\ cm$

$AOM = \pi . R^2 = 28{,}27\ cm^2$

$A\square m = l^2 = 9\ cm^2$

$Aom = \pi . r^2 = 7{,}06\ cm^2$

$St = [A\square m - (AOM : 4)] + (Aom : 4) + \{A\square m - [A\square m - (AOM : 4)]\} - (Aom : 4)$

$9\ cm^2 - (28{,}27\ cm^2 : 4)] + (7{,}06\ cm^2 : 4) + \{9\ cm^2 - [9\ cm^2 - (28{,}27\ cm^2 : 4)]\} - (7{,}06$

$1{,}9325\ cm^2 + 1{,}7611\ cm^2 + 5{,}3\ cm^2 = 8{,}99\ cm^2$

$\simeq 9\ cm^2$

El área de la figura sombreada es de aprox $9\ cm^2$

En este procedimiento, a diferencia de los anteriores, el alumno opera sobre distintas partes de la figura, realizando diversos cálculos para determinar el área requerida.

El marco geométrico aparece como un importante apoyo para la interpretación de ciertas relaciones que le permiten inferir del dibujo la medida de las partes de las sub-figuras, o las operaciones a realizar para obtener sus áreas. Inicialmente asigna ciertos nombres a algunas partes del dibujo, e indica los valores correspondientes que ha inferido.

Utiliza un código que podemos interpretar: usa letras minúsculas para las medidas que corresponden al radio y al diámetro de la circunferencia menor, y al lado del cuadrado menor que es ¼ del cuadrado mayor en cambio, utiliza mayúsculas para las longitudes correspondientes al radio y al diámetro de la circunferencia mayor, y al lado del cuadrado que contiene a ambas circunferencias.

Calcula luego tres áreas de figuras "conocidas" un cuadrado y dos círculos que luego va a combinar a través de cálculos que explicitan las relaciones que utiliza.[4] La escritura que produce intenta comunicar estas relaciones.

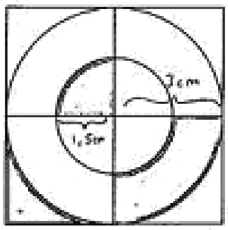
Es interesante notar el cuidado que pone en la escritura de los cálculos, en los que incluye los valores, las unidades, y las marcas que determinan el orden en el que deben realizarse para respetar dichas relaciones. Una pregunta que nos surge es si este detalle tendrá alguna función para el control personal del propio procedimiento, o si se asocia más fuertemente a ciertas "normas" de trabajo matemático en el aula en la que estudia este alumno.

A continuación analizaremos algunos ejemplos en donde los alumnos llegan a realizar un procedimiento **parcialmente correcto** (10,37%) por un error de cálculo en el desarrollo de la resolución que realiza.

4 Notemos que al utilizar un valor aproximado para la constante π, va a obtener valores decimales en los sucesivos cálculos. Si se analiza el procedimiento, se verá que ha decidido truncar a uno, dos o cuatro decimales, con criterios que no se explicitan. Se ha decidido considerar como respuesta correcta al ítem tanto si se arriba al resultado exacto como si se consigue un valor aproximado debido a estas prácticas aritméticas de aproximación.

EJEMPLO 5

1 La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

Primero, se puede obtener el área de la parte sombreada de la circunf. menor ya que si el área total es $\pi . 1,5^2$, entonces el área de la parte sombreada es la cuarta parte de eso, o sea, ~~1,76~~ 1,7
Después, es necesario averiguar también el área del cuadrado y de la circunferencia mayor (Área cuadrado: 9 ; Área circunferencia Ma: 28,
Para calcular la parte sombreada del cuadrado inferior izquierd es necesario restarle la cuarta parte del área de la circunferenc mayor, o sea 7,06. Entonces, el área de esa porción es 9- 7,0
Y para hallar lo sombreado de la circunferencia mayor, hay que restarle al área del cuadrado la cuarta parte de la circunf. menor y el resultado de lo hallado anteriormente. Esto sería 9 - 1,76 - 2,94 = 4,3.
Y el área de todo en total es la suma de estas partes 1,76 + 2,94 + 4,3 = 9.

Esto da este resultado porque las partes se complementa y forman un cuadrado del que el área era 9.

Rta: "Primero, se puede obtener el área de la parte sombreada de la circunferencia menor, ya que si el área total es π. 1,5" , entonces el área de la parte sombreada es la cuarta parte de eso, o sea 1,76.

Después es necesario averiguar también el área del cuadrado y de la circunferencia mayor (Área cuadrado= 9; Área circunferencia Ma: 28,27).

Para calcular la parte sombreada del cuadrado inferior izquierdo, es necesario restarle la cuarta parte del área de la circunferencia mayor, o sea 7,06. Entonces, el área de esta porción es 9 – 7,06= 2,94.
Y para hallar lo sombreado de la circunferencia mayor, hay que restarle al área del cuadrado la cuarta parte de la circunf. menor y el resultado de lo hallado anteriormente .
Esto sería 9 – 1,76 – 2,94 = 4,3.
Y el área de todo en total es la suma de estas partes 1,76 + 2,94 + 4,3 = 9.
Esto da este resultado porque las partes se complementan y forman un cuadrado del que el área era 9.”

A diferencia de la respuesta anterior, en el que el alumno desarrolló un texto que brindaba razones para justificar su procedimiento, en este ejemplo construye un texto en el que va describiendo los pasos que, según él, “se deben” realizar –si bien comienza diciendo “se puede”, a continuación utiliza las palabras “es necesario”, “hay que”–, y a medida que relata el procedimiento, va enunciando las razones por las cuales realiza los cálculos que declara.

En su texto identifica con palabras sobre qué parte del dibujo está trabajando, “la parte sombreada del cuadrado inferior izquierdo”. Utiliza además la palabra circunferencia para referirse al círculo en todos los casos.

En el momento de realizar el cálculo 9 – 7,06, obtiene un resultado erróneo: 2,94 en lugar de 1,94. Este error repercute en el cálculo siguiente, en el que obtiene 4,3 en lugar de 5,3. Sin embargo, como estos cálculos representan las áreas de las partes que luego deberá sumar y compondrán el 9 desde el que partió, los errores de cálculo no revisten importancia para el procedimiento general ya que se compensan, y arriba al resultado correcto.

Es posible que este error se deba al uso de un algoritmo de cálculo en el que el alumno omite descontar 1 a la parte entera cuando “le pide 1” para poder restar en la parte decimal.

Resulta necesario reflexionar sobre el trabajo que puede proponerse desde la enseñanza sobre el control de estas técnicas que muchas veces se utilizan de manera mecánica y sin posibilidades de validarlas autónomamente. Por ejemplo, planificando actividades de estimación, de modo que antes de realizar un cálculo como el anterior, los alumnos estén en condiciones de anticipar que "si a 9 le resto 7, me da 2; entonces si le resto un poco más que 7, me tiene que dar menos que 2".

Una cuestión interesante en este procedimiento aparece en la frase final: "Esto da este resultado porque las partes se complementan y forman un cuadrado del que el área era 9". El uso del pasado ("era 9") nos lleva a interrogarnos sobre el momento en que habrá advertido esta equivalencia entre las figuras.

Sabemos que en situaciones como ésta, algunos alumnos reparan en una relación geométrica una vez que, vía cálculos, advierten una coincidencia entre los valores que manipulan en este caso, el área de $9cm^2$ del cuadrado menor. Otros alumnos, en cambio, se dan cuenta de estas relaciones geométricas inicialmente, pero privilegian el uso de procedimientos aritméticos como modo de asegurarse de que aquello que sospechaban sin hacer cálculos, en verdad era así.

En este segundo caso, los conocimientos geométricos permiten al alumno realizar ciertas anticipaciones que se van a validar en el marco aritmético, mientras que en el primer caso, si bien el estudiante no realiza anticipaciones, los valores le permiten arribar a relaciones geométricas que en primera instancia no había advertido y controlar su respuesta mediante esta nueva manera de mirar el problema en el marco geométrico.

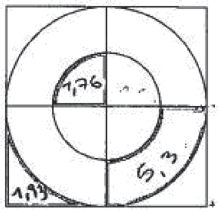
Resulta enriquecedor reflexionar sobre la potencia de contar con herramientas que permitan a los alumnos anticipar resultados, o bien controlar los procedimientos que proponen: *"(…) no estarían en las mismas condiciones quienes, apoyados en el conocimiento de las propiedades, son capaces de detectar la incompatibilidad de los resultados que quienes aceptan los mismos sin cuestionarlos"* [5].

La enseñanza tiene mucho que aportar en este sentido, propiciando en el aula espacios de discusión sobre distintas miradas posibles sobre el mismo problema.

5 *Sadovsky, P.; Parra, C.; Itzcovich, H.; Broitman, C. (1998): Matemática. Documento de trabajo N° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Dirección de Currícula. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.*

EJEMPLO 6

1 La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro.
El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia
menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la
circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

$\pi . 1{,}5^2 = 7{,}06 : 4 = 1{,}76$

$\pi . 3^2 = 28{,}27 - 7{,}06 = 21{,}21 : 4 = 5{,}3$

$3^2 = 9 - 7{,}06 = 1{,}93$

$1{,}93 + 1{,}76 + 5{,}3 = \boxed{5{,}12}$

En este caso el alumno elabora una estrategia de resolución a través del cálculo del área de cada una de las regiones sombreadas, distingue cada una de las áreas y obtiene los datos necesarios para, finalmente, plantear una suma de las áreas calculadas. Al sumar, incurre en un error de cálculo, lo que le impide llegar a un resultado correcto.

Al escribir su razonamiento, incurre en errores en la escritura que algunos investigadores han asociado con rupturas entre el trabajo aritmético y el algebraico.
Por ejemplo, en la primera línea, escribe:
π . 1,52 = 7,06 : 4 = 1,76

Una escritura matemáticamente correcta de este razonamiento sería:
π . 1,52 = 7,06
7,06 : 4 = 1,76

Este alumno no toma en cuenta que lo que aparece a ambos lados del signo igual, debe ser efectivamente igual. No está utilizando el signo teniendo en cuenta que todo lo que aparezca en esa cadena de igualdades debe ser igual entre sí, sino como formando parte de un texto que muestra la sucesión de cálculos que hace para completar su razonamiento. En este sentido, el estudiante que produjo esta escritura utiliza los símbolos matemáticos de manera similar al lenguaje coloquial que utilizó el alumno del ejemplo anterior.

Tal y como señalan Verónica Grimaldi y Horacio Itzcovich

> *"En escrituras aritméticas el signo igual puede cumplir dos funciones: o bien anuncia un resultado como en "12+4=16",o bien expresa la equivalencia entre expresiones como en " 5+1= 2+4". En cambio en las escrituras algebraicas el signo igual siempre expresa una equivalencia".*
> *(…) Uno de los errores más frecuentes en la manipulación de expresiones que involucran el uso del signo igual es la no consideración de ciertas propiedades de la igualdad como relación de equivalencia. Por ejemplo, al resolver un cálculo de varios pasos como "8+5-2+7", muchos alumnos escriben :*
> *" 8 + 5 = 13 – 2 = 11 + 7 = 18", vulnerando la transitividad y la simetría de la igualdad."*[6]

Este tipo de error es muy frecuente entre los alumnos, y merece que los docentes elaboren situaciones de enseñanza que lo aborden específicamente. De este modo, se podrán hacer explícitas cuestiones que, si bien desde la matemática aparecen como "evidentes" formando parte de la "naturaleza" del signo igual, desde la perspectiva de los alumnos no lo son.

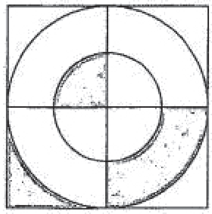
Analizaremos a continuación procedimientos de resolución incorrectos (72,46%)

En los ejemplos que mostramos se evidencia que hay alumnos que confunden área con perímetro.

6 Grimaldi, V , Itzcovich, H ,"Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática", en Broitman, C (comp.), Matemáticas en la escuela primaria II, Buenos Aires, Paidós, 2013

EJEMPLO 7

1. La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

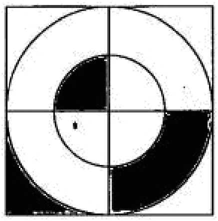
SE CALCULA SACANDO LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA = 2.π R

Rta: "Se calcula sacando la longitud de la circunferencia = 2.π.R"

En este caso el alumno no realiza ningún desarrollo y construye su respuesta centrando su atención en la circunferencia aunque no explicita cuál de las dos que aparecen en el dibujo. Si bien no conocemos las razones por las cuales no toma en cuenta los demás "bordes" que aparecen en el dibujo, su respuesta nos permite suponer que confunde las nociones de área y perímetro.

EJEMPLO 8

1 La figura está formada por un cuadrado con dos circunferencias de igual centro. El radio de la circunferencia mayor es el doble del radio de la circunferencia menor, que mide 1,5 cm. El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia mayor.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

3cm = A un lado
4 . 3 cm = 12 cm area total del cuadrado
el area del cuadrado sombreado es de 6 cm.

A diferencia del caso anterior, este alumno muestra los cálculos que realizó para llegar al resultado. En el procedimiento se indica "3 cm" como longitud del lado del cuadrado, aunque no detalla a qué cuadrado se refiere al que contiene a todas las figuras o a uno de los cuatro cuadrados en que está dividido.

La utilización del cálculo 4 . 3 cm = 12 cm nos permite afirmar que no distingue como diferentes, al menos en esta situación, las nociones de área y perímetro [7].
Finalmente considera la mitad de esta medida como respuesta al problema, asumiendo que lo que el problema le demanda es que calcule el área de un cuadrado "el área del cuadrado sombreado es 6 cm".

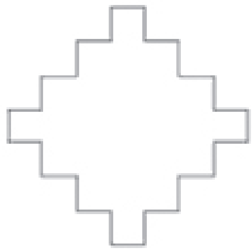
Esta lectura equivocada sobre la figura a la que se refiere el enunciado del problema, puede deberse a la experiencia exclusiva por parte del alumno en torno a actividades con figuras convencionales, las cuales no permiten trabajar sobre situaciones como ésta, en la que es necesario sumar o restar áreas, o bien descomponer y componer figuras a partir de otras.

7 Sobre esta cuestión volveremos al final del análisis de los problemas, para proponer actividades que permiten trabajar sobre esta diferenciación

Problema del área de un polígono

Los alumnos del último año de la Educación Secundaria resolvieron otro problema que involucra el cálculo de áreas. Específicamente el problema requiere el cálculo del área de un polígono no usual.

3



En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

Año:
5°/6° año de la Educación Secundaria Fin de Educación Secundaria
Contenido:
Geometría y medida
Capacidad Cognitiva:
Resolución de problemas
Desempeño:
Resolver un problema que requiere calcular el área de un polígono no usual.

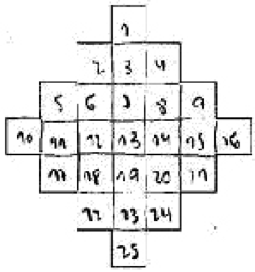
En este caso, los alumnos que no la resolvieron alcanzaron un 46,67%, y dentro de los que sí abordaron la actividad, el 25,18 % la resolvió correctamente.

El problema informa que todos los ángulos son rectos y sus lados de 2 cm lo que habilita la posibilidad de que se pueda descomponer en figuras conocidas como cuadrados o rectángulos.

La estrategia más utilizada por los alumnos que resolvieron el problema correctamente fue la de dividir el polígono en cuadrados de 2 cm de lado, calcular el área de uno de ellos y multiplicarla por el número total de cuadrados que componían la figura, como puede observarse en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9

3



En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

Área □ = (2 cm)^2 = 4 cm^2 x 25(□) = 100 cm^2

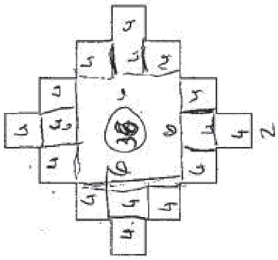
Este alumno realizó trazos horizontales y verticales para que la figura original quede dividida en cuadrados, y luego los numeró, llegando a 25. Calculó el área de uno de ellos y la multiplicó por 25, obteniendo 100 cm^2.

Nuevamente, encontramos que para mostrar cómo lo pensó, escribe una serie de pasos que intentan comunicar el orden del razonamiento propuesto, además de las relaciones involucradas. En esta escritura, el signo igual actúa mayormente como conector entre diferentes partes del razonamiento.

Otros alumnos realizaron descomposiciones diferentes.

EJEMPLO 10

3



En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

área ⊓ $l^2 = 6^2 = 36$

área ⊓ $l^2 = 2^2 = 4$ $16 \times 4 = 64$

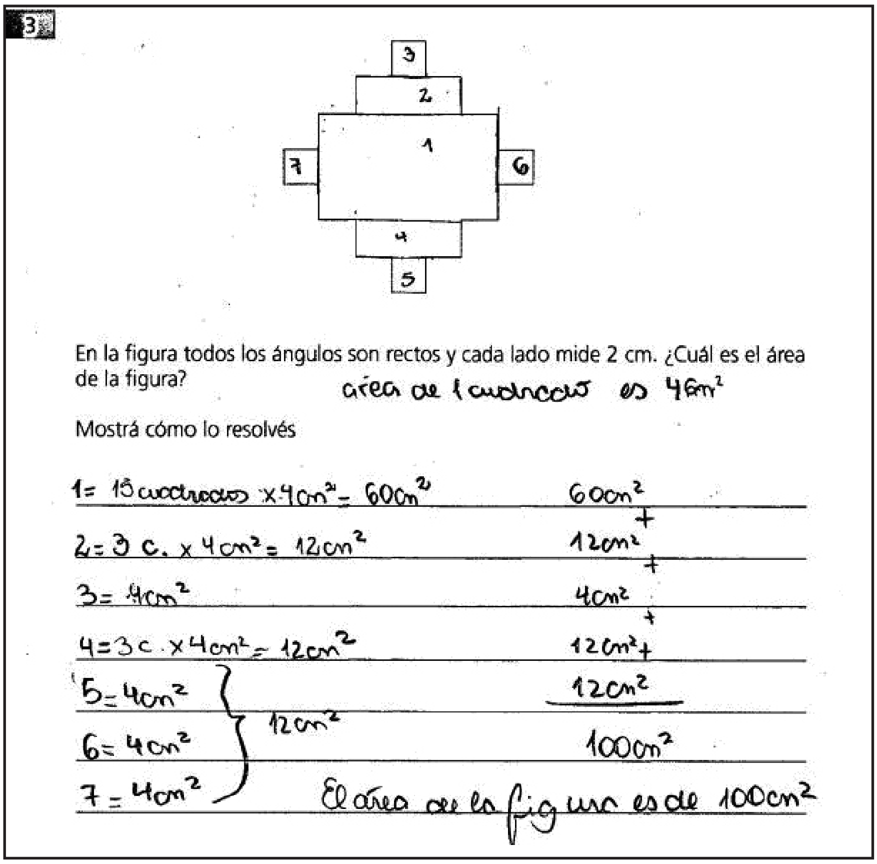
$64 + 36 = 100$

el área de la figura es 100

En este caso, el alumno calcula dos áreas diferentes tomando como base el dato que brinda el enunciado: el área de los cuadraditos de lado 2 para obtener un área 4, que repite 16 veces, y el área del cuadrado central de lado 6 cm para obtener área 36.

A diferencia de las notaciones del ejemplo anterior, en este caso el alumno coloca dentro de cada cuadrado de lado 2 el valor de su área. En el cuadrado central no solo explicita el valor del área, sino que también coloca la medida de sus lados.

EJEMPLO 11



En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

área de 1 cuadrado es 4cm²

Mostrá cómo lo resolvés

1= 15 cuadrados x 4cm² = 60cm² — 60cm² +

2= 3 c. x 4cm² = 12cm² — 12cm² +

3= 4cm² — 4cm² +

4= 3 c. x 4cm² = 12cm² — 12cm² +

5= 4cm²

6= 4cm² } 12cm² — 12cm²

7= 4cm²

100cm²

El área de la figura es de 100cm²

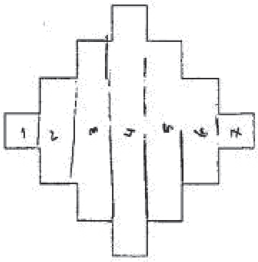
En este caso se muestra otra descomposición de la figura original: un rectángulo central mayor, dos rectángulos menores y 4 cuadrados.

Para calcular el área de cada parte de la figura, el alumno toma como referencia el área de un cuadradito y lo repite tantas veces como sea necesario en cada sub-figura que define dentro del polígono.

Los números que coloca dentro de los dibujos le permiten controlar el procedimiento y no olvidarse de considerar ninguna para el cálculo del área total. Es interesante advertir esta cuestión del control en problemas que, como éste, exige tener en cuenta muchos pasos o muchas partes.

EJEMPLO 12

3



En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

a1 = a7 = 2x2 = 4 cm² a = a1+a2+a3+a4+a5+a6+a7 =

a2 = a6 = 2x6 = 12 cm² a = (4+12+20+28+20+12+4) = 100 cm²

a3 = a5 = 2x10 = 20 cm²

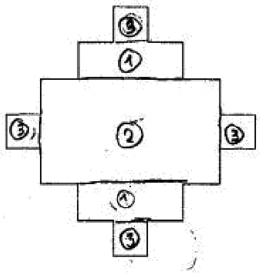
a4 = 2x14 = 28 cm²

Rta: a1 = a7 = 2 x 2 = 4 cm^2 a = a1 + a2+ a3 + a4+ a5 + a6 + a7
a2 = a6 = 2 x 6 = 12 cm^2 a = (4 + 12 + 20 + 28 + 20 + 12 + 4) = 100

El alumno aquí descompone la figura en dos cuadrados y cinco rectángulos. Numera cada parte de su figura de análisis y calcula el área de cada una, controlando que se consideren todas para la suma total. Si bien no opera con las unidades, las agrega al resultado de cada cálculo.

EJEMPLO 13

3



En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

1 → 2 . 3 = 6 . Área □1 = 12 cm

2 → 2 . 5 = 10 . 2 . 3 = 6 Área □2 = 60 cm

3 → Área □3 = 4 cm

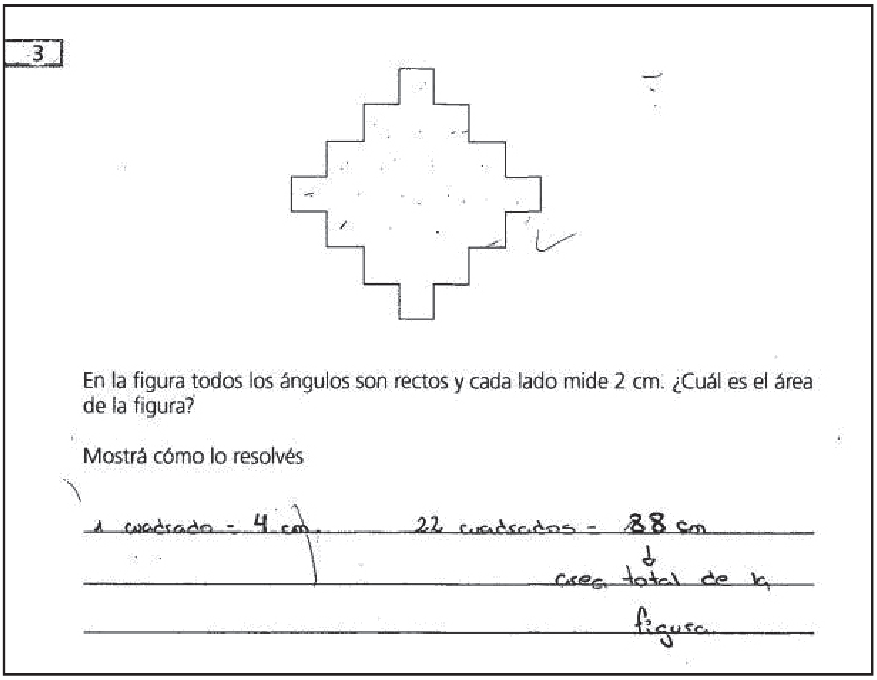
Área total = 60 cm² + 12 cm² . 2 + 4 cm² . 4 .

Área total = 100 cm²

Como puede verse, no existe una manera única de descomponer la figura original para calcular el área. Todos estos procedimientos nos brindan información acerca de maneras diferentes que tienen los alumnos de “ver” una misma figura.

Hemos encontrado algunas respuestas parcialmente correctas (2,66%), como por ejemplo la que mostramos a continuación.

EJEMPLO 14


3

En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

1 cuadrado = 4 cm   22 cuadrados = 88 cm
↓
area total de la figura

Rta: 1 cuadrado = 4 cm   22 cuadrados= 88 cm
↓
"área total de la figura"

En este caso, la estrategia es la misma que en el primer ejemplo que mostramos en esta sección. Sin embargo, el alumno aparentemente cuenta mal el número de cuadraditos en que queda dividida la figura, y el hecho de no disponer de ninguna marca sobre el dibujo que le permita controlar este conteo, hace que el resultado al que arriba no sea correcto.

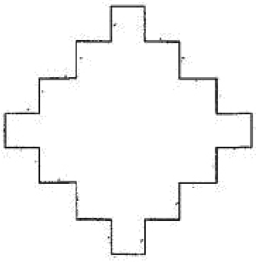
También aquí, como ya se ha analizado a propósito de uno de los ejemplos del problema anterior, el alumno utiliza la idea de área para calcular el valor asociado a un solo cuadrado, expresándolo en unidades lineales.

Las resoluciones incorrectas alcanzaron al 72,16%

Dentro de las resoluciones incorrectas se destacan las de los estudiantes que no tienen clara la diferencia entre las nociones de perímetro y de área (17,93%) e hicieron cálculos que tienen relación con el perímetro.

EJEMPLO 15

3



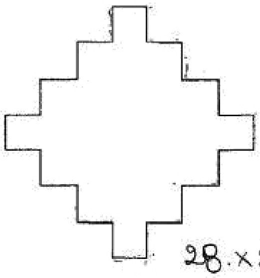
En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

LAFigura Posee 28 Lados
C/a Lado = 2 Cm
2.28 = 56 Cm
56 Cm es el Area de La
Figura

EJEMPLO 16

3



28.x2 = 56

En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

Contando todos los lados (28) y multiplicandolos
por 2 ya que cada lado mide 2 cm. y el área
es la suma de todos los lados.

En ambos casos los alumnos decidieron contar la cantidad de lados que conforman el "borde" del polígono. Si bien la cantidad es correcta en los dos casos, a continuación multiplican esta cantidad por la medida del lado del cuadrado, obteniendo un valor que en realidad representa el perímetro del polígono y no su área.

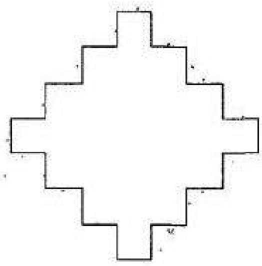
> *"El área y el perímetro son dos conceptos íntimamente ligados, por lo que el estudio de dicha relación no debería quedar afuera de la escuela.*
> *Su exploración favorece el mayor entendimiento de determinadas propiedades que sólo quedan en evidencia a partir de un trabajo de diferenciación entre las mismas. Esta práctica no toma en cuenta que las magnitudes área y longitud están íntimamente relacionadas, y por lo tanto se impone un trabajo de diferenciación entre ellas, que colabore en la mayor comprensión de cada una."*[8]

Algunos alumnos identificaron la figura dada como un rombo, y calcularon su área utilizando la expresión correspondiente al área de dicho cuadrilátero (la cual se les brindaba en la hoja de fórmulas). La representación escolar y social típica del rombo –un cuadrilátero con lados iguales que siempre se dibuja con las diagonales paralelas a los bordes de la hoja- probablemente permita explicar el hecho de que, al ver el polígono propuesto con esta orientación, los alumnos lo relacionen con ese cuadrilátero.

8 Aportes para la enseñanza de la matemática, SERCE, LLECE, UNESCO, 2009

EJEMPLO 17

3



En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

Perímetro de la figura. 56 cm

Figura: rombo   Cada lado mide: 14 cm

Area del rombo: $\frac{D.d}{2}$

Area del rombo: $\frac{28.28}{2}$

Area del rombo. 392.

Rta: Perímetro de la figura= 56 cm
Figura: Rombo Cada lado mide= 14 cm

Área del Rombo: $\frac{D.\ d}{2}$

Área del Rombo: $\frac{28\ .\ 28}{2}$

Area del Rombo: 392

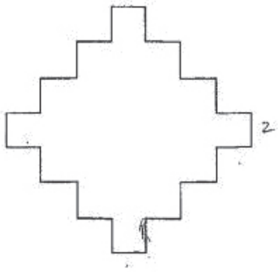
En este caso el alumno comienza calculando el perímetro de la figura, no detalla de qué manera, y luego declara que la figura es un rombo, y que cada lado mide 14 cm. Inferimos que al identificar el polígono con un rombo, esta idea lo llevó a considerar la presencia de cuatro lados y por esta razón calcula 56 : 4 para obtener 14.

Resulta notable que, para estar en condiciones de utilizar la fórmula que corresponde según el análisis que ha hecho de la situación, necesita la longitud de las diagonales, que obtiene al sumar el valor de dos de los lados en cada caso. Esto explicaría la presencia del 28 en la fórmula que utiliza finalmente para hacer el cálculo.

Otros alumnos recurrieron a la fórmula del área del triángulo.

EJEMPLO 18

3



En la figura todos los ángulos son rectos y cada lado mide 2 cm. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

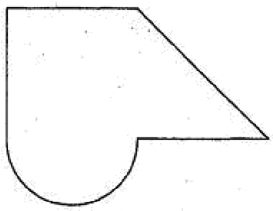
el área de la figura es 2.

Observemos que en este caso, el alumno utiliza el valor dado en el enunciado para reemplazar las dos variables de la fórmula. La única marca que propone sobre el dibujo no alcanza para determinar a qué partes ha asignado los roles de base y altura del triángulo que visualiza en el dibujo.

Problema del área de una figura que hay que descomponer e involucra suma

Veamos ahora cómo resolvieron los alumnos de la muestra de **2°/3° año** de Educación Secundaria las actividades de Geometría y Medida que se les propusieron.

3 La figura está formada por un cuadrado de lado 2 cm, un triángulo isósceles y un semicírculo. ¿Cuál es el área de la figura?



Mostrá cómo lo resolvés

Año:	
2°/3° año de Educación Secundaria	
Contenido:	
Geometría y Medida	
Capacidad Cognitiva:	
Resolución de problemas	
Desempeño:	
Resolver un problema que involucra cálculo del área de una figura	

Se trata de un problema que involucra el cálculo de área a través de la descomposición de la figura en otras. Los alumnos, recurriendo a sus conocimientos, deberán seleccionar las figuras que componen la figura de análisis.

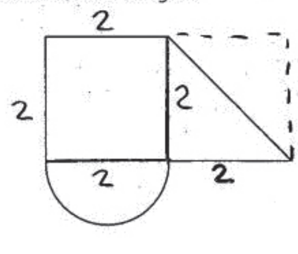
En su mayoría, los alumnos optaron por descomponerla en un cuadrado, un semicírculo y un triángulo. Otra posibilidad es considerar un trapecio rectángulo y un semicírculo.

Para la resolución, los alumnos cuentan como dato con la medida del lado del cuadrado que coincide con el diámetro del semicírculo y con la medida de los lados congruentes del triángulo isósceles.

Un 58,73% de alumnos no resolvió la actividad y de los alumnos que respondieron a la situación planteada, el 9,68% lo hizo de manera correcta. A continuación mostramos algunos ejemplos.

EJEMPLO 19

3 La figura está formada por un cuadrado de lado 2 cm, un triángulo isósceles y un semicírculo. ¿Cuál es el área de la figura?



Mostrá cómo lo resolvés

Área semicirculo =

Diametro → 2 $\quad 1^2 . 3,14 = 3,14$

Radio → 1 $\quad 3,14 : 2 = \boxed{1,57}$

Área cuadrado = $2^2 = \boxed{4}$

Área triangulo =

$2^2 = 4$

$4 : 2 = \boxed{2}$

Rta:

Área total: $4 + 2 + 1,57 = 7,57$.

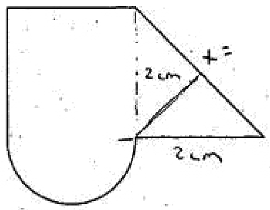
El alumno descompone la figura en un cuadrado, un semicírculo y un triángulo. Sobre el dibujo, marca estas figuras y agrega una línea punteada que completa un cuadrado de lado 2. También coloca valores que indican ciertas longitudes en la figura.

Considera la medida del radio del semicírculo en relación con el diámetro, para luego calcular su área. A continuación, calcula el área del cuadrado de la izquierda y del triángulo.

Es importante destacar su manera de proceder para calcular el área del triángulo. La escritura que utiliza sugiere que primero calcula el área del cuadrado que ha completado a partir del punteado que también es de lado 2, y a continuación divide este valor por 2, considerando que el triángulo es la mitad de este cuadrado. Si bien la serie de cálculos corresponde a la fórmula del área del triángulo, este alumno no la aplica.

EJEMPLO 20

3. La figura está formada por un cuadrado de lado 2 cm, un triángulo isósceles y un semicírculo. ¿Cuál es el área de la figura?



Mostrá cómo lo resolvés

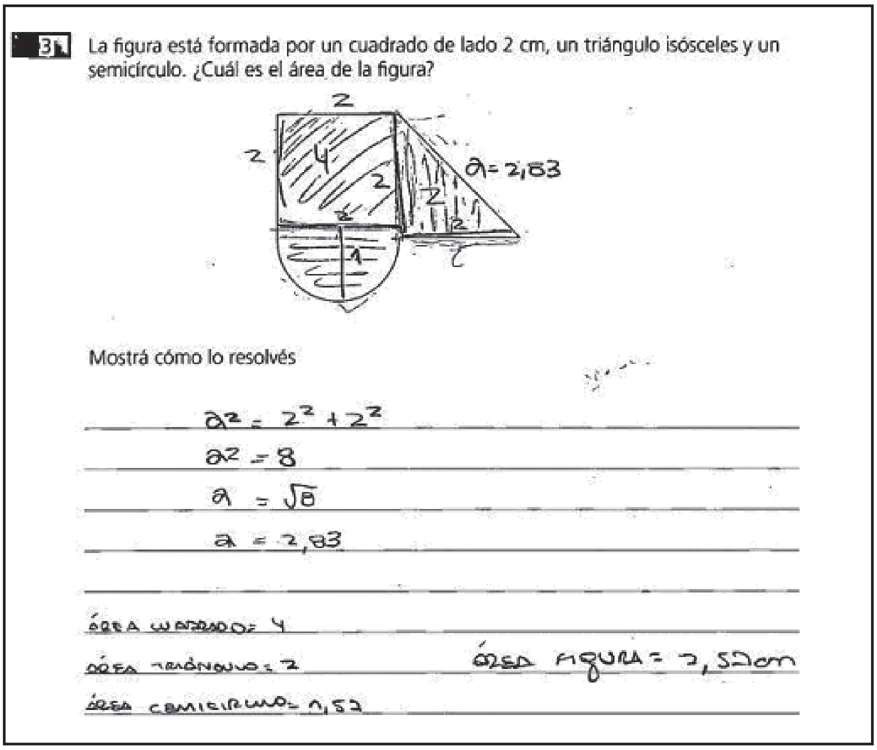
Área □ = l^2 Área Δ = $\frac{b \cdot h}{2}$
Área □ = $(2cm)^2$
Área □ = $4cm^2$ Área Δ = $\frac{2cm \cdot 2cm}{2}$
Área ○ = $\pi \cdot r^2$ Área Δ = $2cm^2$
Área ○ = $\pi \cdot (1cm)^2$
Área ○ = $3,14cm^2$ Área figura = Área □ + Área Δ +
Área ◠ = Área ○ : 2 Área Δ = $4cm^2 + 2cm^2 + 1,57cm^2$
Área ◠ = $1,57cm^2$ Área figura = $7,57cm^2$

Como en el ejemplo anterior, este alumno descompone la figura en un cuadrado, un triángulo y un semicírculo. Escribe un detalle minucioso y ordenado del procedimiento, escribiendo las fórmulas que va a utilizar y posteriormente el cálculo que resulta al aplicarla a este caso. Opera con las unidades en todo momento, y obtiene el área total por suma de las áreas parciales.

Cabe aquí la pregunta acerca del rol que tiene en su razonamiento la línea que traza sobre el triángulo, así como la explicitación de la medida 2 cm y la presencia de la escritura "x =" al costado de la hipotenusa. ¿Qué segmentos habrá considerado como base y altura para calcular su área a través de la fórmula que utilizó? ¿A cuáles de los segmentos que aparecen en el dibujo les asigna el valor 2 cm?

Muchos alumnos asumen como base del triángulo al lado más largo, y en estos casos, la altura siempre es interior a la figura. ¿Será que el agregado que aporta al dibujo intenta representar la altura correspondiente a la hipotenusa del triángulo? Quizás la presencia de la escritura "x =" represente el intento de este alumno por determinar la longitud de esta "base".

EJEMPLO 21



31 La figura está formada por un cuadrado de lado 2 cm, un triángulo isósceles y un semicírculo. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

a² = 2² + 2²
a² = 8
a = √8
a = 2,83

área cuadrado = 4
área triángulo = 2
área semicírculo = 1,57
área figura = 7,57cm

Rta: $\partial^2 = 2^2 + 2^2$

$\partial^2 = 8$

$\partial = \sqrt{8}$

$\partial = 2{,}83$

Área cuadrado = 4

Área triángulo = 2 *"Área figura= 7,57 cm"*

Área semicírculo = 1,57

Al igual que en los ejemplos anteriores, el alumno descompone la figura de análisis en un cuadrado, un triángulo y un semicírculo. Pero, a diferencia de aquellos, el único cálculo que explicita es el que le permite hallar el valor de la hipotenusa del triángulo, dato que no es necesario para la resolución.

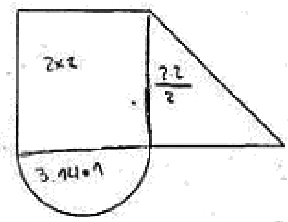
Podríamos explicar esta cuestión, advirtiendo que muchos de los alumnos se sienten más seguros si cuentan con todos los datos de las figuras, aunque algunos de ellos no sean relevantes o no sean de utilidad.

Los valores que obtiene son correctos, y debemos inferir que ha sumado para llegar al valor total. En este caso, el alumno opera sin utilizar las unidades en los cálculos parciales, y solo agrega la unidad "cm" de manera errónea al final del procedimiento, cuando da la respuesta al problema.

Algunos alumnos resolvieron la actividad en forma **parcialmente correcta** (7,10%), y otros las hicieron en forma incorrecta (83,22%).

Detallamos a continuación un ejemplo de respuesta **parcialmente correcta**.

EJEMPLO 22


3. La figura está formada por un cuadrado de lado 2 cm, un triángulo isósceles y un semicírculo. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

$2.2 + \frac{2.2}{2} + 3,14.1$

$4 + \frac{4}{2} + 3,14$

$7,14 + \frac{4}{2}$

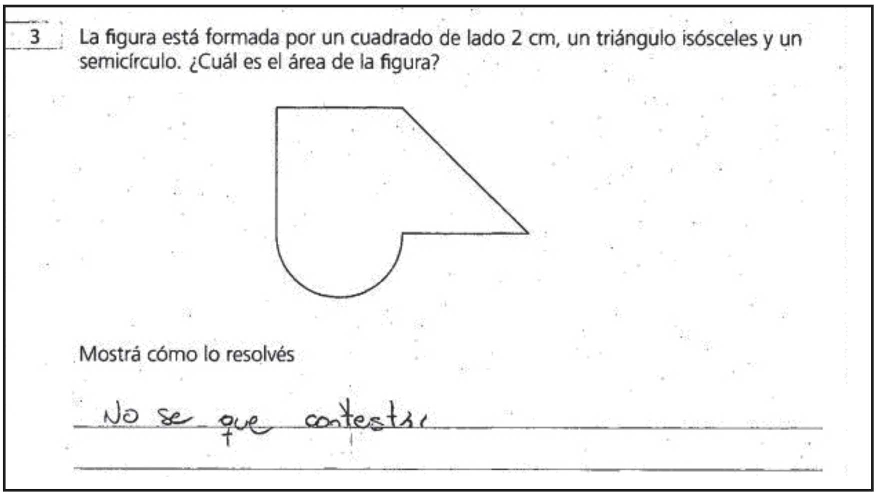
$\boxed{\frac{9}{14}}$

En este ejemplo, el alumno muestra con trazos sobre el dibujo que descompone la figura de manera adecuada, y a partir de sus escrituras podemos inferir que comprende que para obtener el área total debe sumar las tres porciones en las cuales descompuso la figura. Ubica además el cálculo que representa el área de cada parte sobre la porción correspondiente en el dibujo.

Comete un error al considerar el área del círculo en lugar de la del semicírculo, y también al expresar el resultado final. Los valores involucrados nos sugieren que pudo haber considerado la suma 7,14 + 2 = 9,14, y decidir que debía expresarlo en forma de fracción, equiparando el número 9,14 con $\frac{9}{14}$

Dentro de las respuestas incorrectas encontramos las de los estudiantes que **no pudieron resolver la actividad**, y las de los que la **resolvieron incorrectamente**.

EJEMPLO 23



3 La figura está formada por un cuadrado de lado 2 cm, un triángulo isósceles y un semicírculo. ¿Cuál es el área de la figura?

Mostrá cómo lo resolvés

No se que contestar

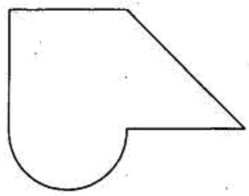
Algunos estudiantes atribuyeron la no resolución a "no saber qué contestar", como se muestra a continuación.

Rta: "No sé qué contestar"

Otros resolvieron incorrectamente al confundir la noción de área con la de perímetro.

EJEMPLO 24

3 La figura está formada por un cuadrado de lado 2 cm, un triángulo isósceles y un semicírculo. ¿Cuál es el área de la figura?



Mostrá cómo lo resolvés

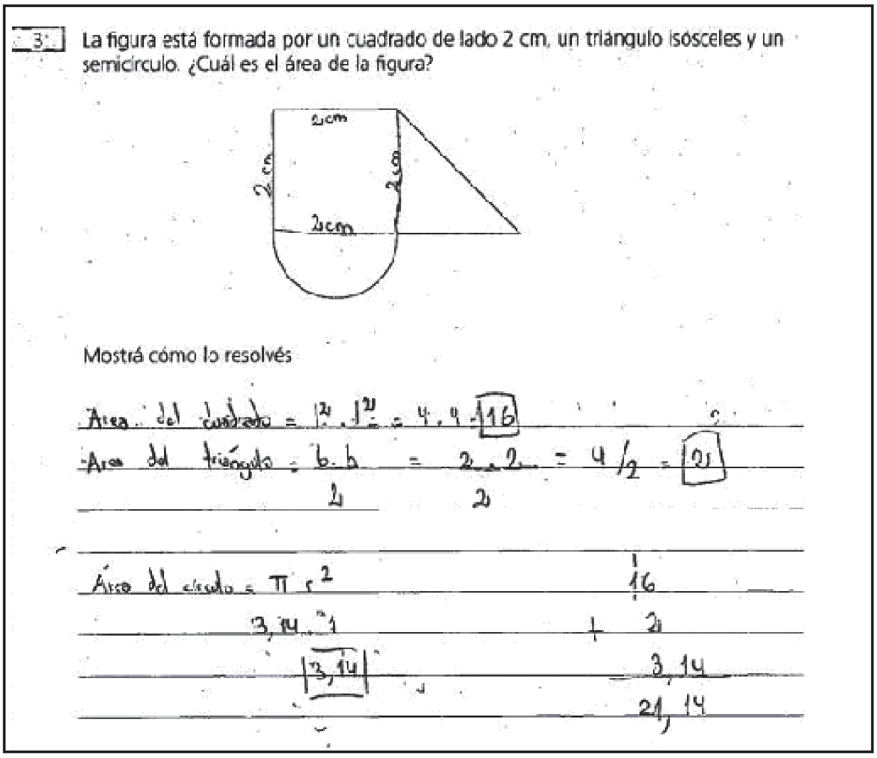
la suma de dos lados del cuadrado mas dos del triangulo
y la bace del cemicirculo

Rta: " la suma de dos lados del cuadrado más dos del triángulo y la base del semicírculo"

El alumno no realiza ningún cálculo para ofrecer la respuesta; sin embargo, explicita el procedimiento que debe seguir para obtenerla, manifestando en esta descripción la noción de perímetro en lugar de la de área.

Veamos otra respuesta incorrecta

EJEMPLO 25



El alumno realiza trazos sobre el dibujo a través de los que muestra una descomposición pertinente de la figura. El desarrollo que propone es ordenado y los cálculos que propone están correctamente realizados. Halla, sin embargo, el área del círculo en lugar de la del semicírculo, y utiliza una fórmula diferente a la que se le propone en la hoja de fórmulas para calcular el área del cuadrado.

Puede llamar la atención el hecho de que obtiene un valor bastante "grande" en relación al correcto cercano a 7,5, y no repara en que esto no es posible. Si retrocedemos un poco en su procedimiento, veremos que desde el inicio obtiene 16 como área de un cuadrado de lado 2, y este valor no le ha resultado conflictivo, aun obteniendo áreas tan diferentes para figuras que, comparadas, resultan similares en tamaño.

Todo este análisis tiene sentido desde el punto de vista del docente. Sin embargo, un alumno que produce este error no ha aprendido aun a controlar sus procedimientos.

Los conocimientos que puede desplegar en torno a los cálculos que realiza y al uso de fórmulas, están desarticulados de los conocimientos, que podría tener disponibles o no, acerca del "tamaño" que supone una cierta área, o qué superficies similares en tamaño deberían tener áreas similares.

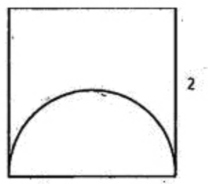
Resulta necesario incorporar a los proyectos de enseñanza instancias de trabajo sobre estrategias que, poniendo en diálogo diferentes modos de representación de un problema a través de fórmulas, cálculos, dibujos, permitan a los alumnos apropiarse de maneras de controlar autónomamente el sentido de los resultados que obtienen en relación con el problema.

Problema del área de una figura que involucra una diferencia

Analizaremos a continuación otra de las actividades presentadas en la prueba **ONE 2013** para los alumnos de **2°/3° año** de Educación Secundaria.

EJEMPLO 26

2 La figura está formada por un cuadrado y un semicírculo.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

Año:
2°/3° año de Educación Secundaria
Contenido:
Geometría y Medida
Capacidad Cognitiva:
Resolución de problemas
Desempeño:
Resolver un problema que requiera resta de áreas

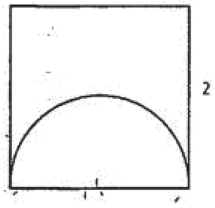
Este problema involucra conocimientos geométricos y de medida. Requiere el cálculo del área de dos superficies para luego efectuar su diferencia.

No todos los alumnos lograron abordar el problema (52,21%).De los que sí respondieron hubo un 10,60% que lo hizo correctamente y el 5,3% en forma parcialmente correcta.

A continuación analizamos algunas de las resoluciones de los alumnos

EJEMPLO 27

2 La figura está formada por un cuadrado y un semicírculo.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

Cuadrado: $A = l^2$ Semicirculo $A = \pi . r^2$

$A = 2^2$ $A = 3,14 . 1^2$

$A = 4$ $A = 3,14 . 1$

$A = 3,14 : 2$

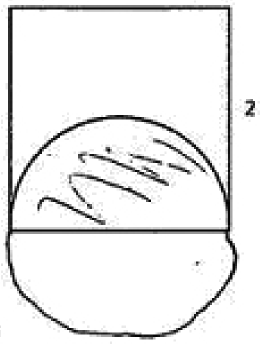
$A = 1,57.$

Areatotal: 2,43

En esta resolución se puede observar que el alumno calcula el área del cuadrado y del semicírculo y aunque no escribe el cálculo de la diferencia, se infiere que ha utilizado una resta, dado que llega a una respuesta correcta.

EJEMPLO 28

2 La figura está formada por un cuadrado y un semicírculo.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

$2 \times 2 = 4$ $3,14 \times 1^2 = 3,14 \% 2 = 1,57$

$4 - 1,57 = 2,43$

El área de la figura sombreada es 2,43.

En este caso, el estudiante utiliza un procedimiento correcto: calcula el área del cuadrado, luego la del semicírculo, y por último realiza la diferencia para obtener el área de la figura sombreada.

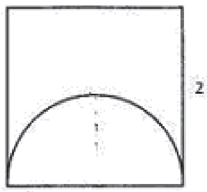
Vemos que el alumno realiza los cálculos sin especificar a qué corresponde cada uno. Para orientarse en el cálculo del área del semicírculo, dibuja en la figura de análisis el círculo completo y sombrea la mitad que quiere calcular. El cálculo muestra una división por 2 que, interpretamos, da cuenta de esta idea.

En la primera línea aparece "$3,14 \times 1^2 = 3,14 : 2 = 1,57$", utilizando el signo "=" como expresión de una igualdad que no es tal. Tal y como se ha analizado en el ejemplo 6, es necesario un trabajo en el aula para contemplar los significados del signo, de modo que no se constituya en un obstáculo para el trabajo algebraico.

A continuación se mostrarán ejemplos de **resoluciones incorrectas** interesantes, que alcanzaron el 84,10%

EJEMPLO 29

2 La figura está formada por un cuadrado y un semicírculo.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Mostrá cómo lo resolvés

Área □ $= L^2 \Rightarrow 2^2 \Rightarrow 4\ cm^2$

Área ◠ $= \frac{\pi . r^2}{2} \Rightarrow \frac{\pi . 1^2}{2} = 1{,}57\ cm^2$

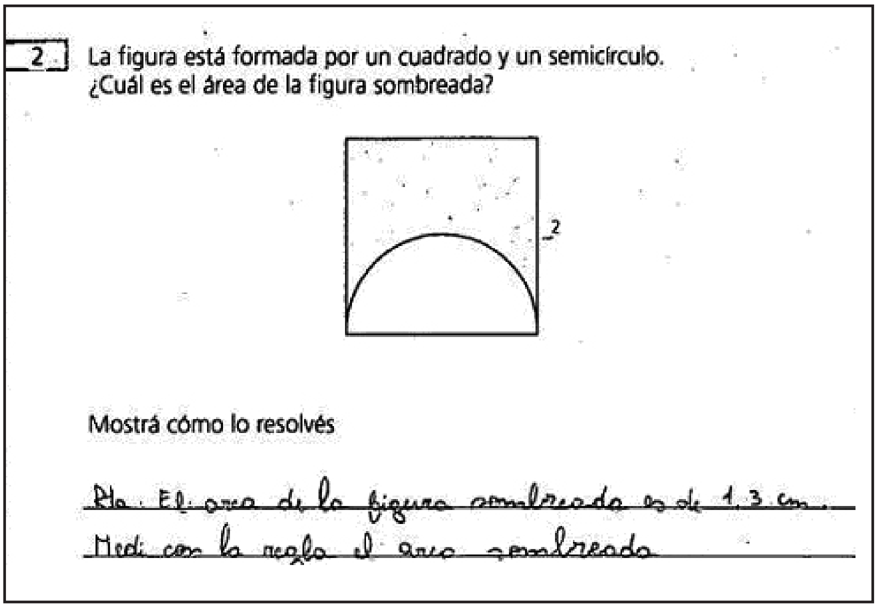
Área total = área □ + área ◠ $\Rightarrow 4 cm^2 + 1{,}57 cm^2 = 5{,}57\ cm^2$

El alumno comienza desarrollando un procedimiento correcto, calculando el área del cuadrado y del semicírculo, pero luego obtiene en forma errónea el área de la figura sombreada, sumando ambas áreas en lugar de hallar su diferencia.

Es interesante analizar que considera al área total como la suma de las áreas de ambas figuras sin tener en cuenta que hay una superposición entre el cuadrado y el semicírculo. Identificar esta superposición posibilita comprender la necesidad de restar las áreas.

También podríamos pensar que quien produce este procedimiento no está controlando que, si el cuadrado tiene área 4, el área sombreada debería ser menor. Igual que en un caso analizado anteriormente, desarrollar estrategias de control que aborden la imposibilidad del resultado obtenido, debería ser objeto de enseñanza.

EJEMPLO 30


2 La figura está formada por un cuadrado y un semicírculo.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?

Mostrá cómo lo resolvés

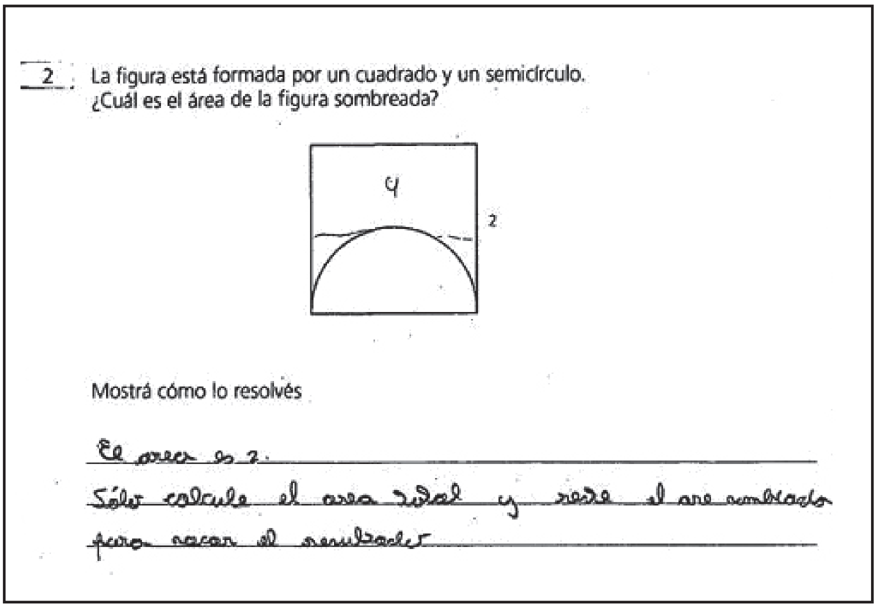
Rta. El area de la figura sombreada es de 1.3 cm.
Medi con la regla el area sombreada

Rta: "El área de la figura sombreada es de 1,3cm.
Medí con la regla el área sombreada"

Aquí el estudiante precisa que obtuvo el valor presentado como respuesta, midiendo con regla. No está claro qué parte del dibujo ha medido con este instrumento, pero es interesante señalar su concepción acerca de que la medición con instrumentos geométricos es una estrategia adecuada para validar su trabajo.

Avanzar desde estrategias empíricas hacia otras de carácter deductivo no se da de manera natural. Por el contrario, necesita un trabajo sostenido y planificado desde la enseñanza.

EJEMPLO 31


2 La figura está formada por un cuadrado y un semicírculo.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?

Mostrá cómo lo resolvés

El area es 2.
Sólo calcule el area total y reste el are sombreado
para sacar el resultado

Rta: "El área es 2
Sólo calculé el área total y reste el área sombreada para sacar el resultado"

Varios estudiantes trasformaron la figura, dividiendo en dos el cuadrado, y "convirtieron" el semicírculo en un rectángulo. De este modo, lograron transformar la figura en otra, tal vez más familiar y con ello, afrontaron el cálculo del área del rectángulo sombreado.

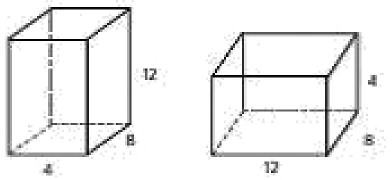
Podemos conjeturar que estos estudiantes tuvieron experiencias más vinculadas a "observar" dibujos que otras que le permitieran avanzar hacia una modelización que no quede tan pegada a lo perceptivo, dado que el objeto geométrico es un objeto ideal de la matemática, que no tiene existencia física, y requiere de múltiples representaciones.

La presencia del número 4 dentro del cuadrado podría significar que ha calculado su área, quizás correspondiente al "área total" a la que se refiere en el texto que presenta. Las marcas sobre el dibujo parecen indicar que ha considerado al cuadrado dividido en dos rectángulos iguales, y tal vez obtiene 2 la mitad de 4, quitando el rectángulo inferior que contiene una parte no sombreada.

Problema del volumen

Una muestra de alumnos de **2°/3° año de Educación Secundaria** resolvió la siguiente actividad:

1 Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

Año:	
2°/3° año de Educación Secundaria	
Contenido:	
Geometría y Medida	
Capacidad Cognitiva:	
Resolución de problemas	
Desempeño:	
Resolver un problema que involucra el concepto de volumen	

El 49,99% de los alumnos de la muestra omitieron resolver esta actividad. Dentro de los que la respondieron encontramos un 8,11% de respuestas correctas.

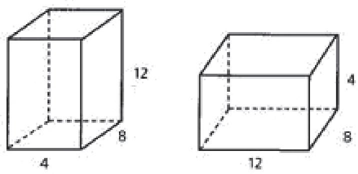
Este ítem fue probado en el piloto 2012 con el dibujo de un solo prisma y con el mismo enunciado. A los alumnos les resultó muy difícil resolver el problema. Pensamos que el hecho de que tuvieran que imaginar el segundo prisma con las medidas de las aristas de la base de apoyo como pedía el problema, fue un inconveniente que dificultó la resolución.

Incorporamos entonces el dibujo del mismo prisma en otra posición con el agregado de las medidas de las aristas, con la hipótesis de que podría facilitar la comprensión y resolución del mismo.

Veamos algunos procedimientos de resolución elegidos por los alumnos.

EJEMPLO 32

1 Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

4 x 8 = 32   12 x 8 = 96
Si la base crese x3, entonces la altura disminuye x3.
Rta: el agua alcanza los 3 cm.

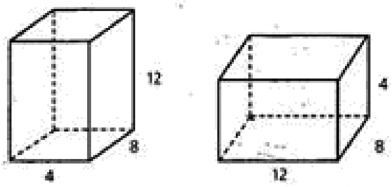
El alumno reconoce que el volumen del agua es el mismo, no cambia. Calcula el área de la base de cada uno de los prismas y establece la proporcionalidad inversa entre el área de la base y la altura: a mayor área de la base, menor altura, actuando el volumen como constante de proporcionalidad que no necesita calcular.

Área de la base	*Altura*
32	*9*
96	*3*

x 3   ÷ 3

EJEMPLO 33

1. Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



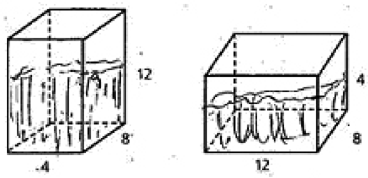
Mostrá cómo lo resolvés

Cuando la prisma se apoya sobre su cara más grande el agua llega hasta los 3cm... y disminuye 3 veces la parte más grande de la cara es decir 3cm alcanza el agua.

En este caso el alumno no muestra ningún cálculo. A partir del uso de la idea de que "disminuye 3 veces", podríamos conjeturar que utiliza un razonamiento análogo al anterior.

EJEMPLO 34

1. Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

$V = 9 \times 4 \times 8 = 288\ cm^3$ $V = 12 . 8 . x$

$288 = 96 . x$

Rta: La altura que alcansa es $3 cm^3$ $288 \div 96 = 3\ cm$

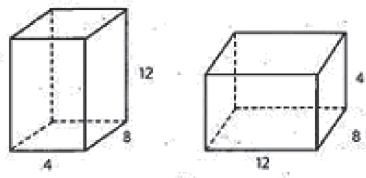
En este procedimiento, el alumno calcula el volumen del agua contenida en el primer prisma y reconoce que es el mismo volumen de agua que va a contener el prisma al cambiar su posición.

Plantea una ecuación para calcular la altura del agua (x) a la que debe arribar. Opera correctamente y obtiene para la altura el valor 3 cm. Al escribir la respuesta, utiliza la escritura 3 cm^3, lo cual puede deberse a una equivocación.

La altura 12 cm del primer prisma es un dato que no necesita utilizar.

EJEMPLO 35

1. Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

volumen (prisma 1) = a·b·c
= 4cm · 8cm · 12cm
= $384cm^3$
volumen (agua) = a·b·c
= 9cm · 8cm · 4cm
= $288 cm^3$
volumen (prisma 2) = a·b·c
= 12cm · 8cm · 4cm
= $384cm^3$
volumen agua en prisma 2 = a·b·h
$288cm^3$ = 12cm · 8cm · h
$288cm^3 : 96cm^2 = h$
$\boxed{3cm = h}$ → h que alcanza el agua

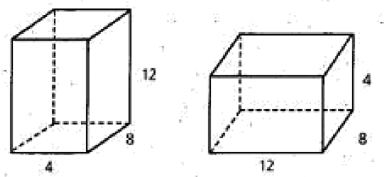
En esta resolución no está claro si el alumno no reconoce que se trata de un mismo prisma que cambia de posición, o si aun reconociendo esta cuestión, no identifica que este hecho implica que su volumen será el mismo. También es posible que tenga la creencia de que para comunicar su procedimiento necesita mostrar todos estos valores a través de cálculos.

Por el contrario, identifica que el volumen de agua que ha calculado con los datos del prisma 1, será el mismo para el prisma 2, quizás a partir de que el resultado de los cálculos del volumen de ambos prismas han sido iguales, y plantea la ecuación incluyendo el valor desconocido de la altura, a la que llama h. Obtiene correctamente h = 3 cm.

Hay resoluciones que fueron consideradas **parcialmente correctas** (2,09%) por estar incompletas o con errores de cálculo.

EJEMPLO 36

1 Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

En el primer prisma alcanzo 384 l.

4 ×8 = 32   32 ×12 = 384

En el prisma dos (2) alcanza 384 L

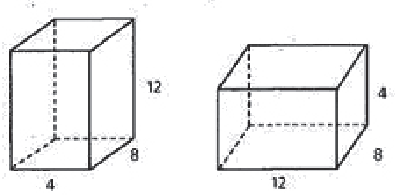
12 ×8 = 96   96 ×4 = 384

El alumno en este caso, calcula los volúmenes de los dos prismas. No podemos estar seguros de las razones que lo llevan a abandonar allí su trabajo. Pensamos que las prácticas escolares habituales que solo proponen actividades de cálculo de volumen de cuerpos geométricos conocidos, podría explicar la decisión del alumno de dar por terminado el problema en este punto.

Los estudiantes con resoluciones incorrectas alcanzan el 89,80%.

EJEMPLO 37

1 Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

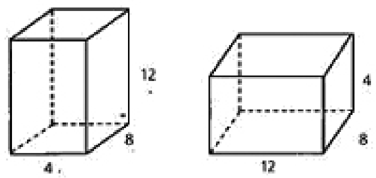
Lo Resolberia con una Regla y el Resultado
seria 4

La idea de determinar la altura del agua la relaciona con la de medir una longitud, para lo cual declara que usaría una regla. Es probable que su respuesta se apoye en la evidencia visual que ofrecen los datos del problema sobre el segundo dibujo, en el que la altura del prisma es 4.

Hay alumnos que ante este problema recurren a sumar los datos (1,44%). Lo vemos en la respuesta que sigue.

EJEMPLO 38

1 Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



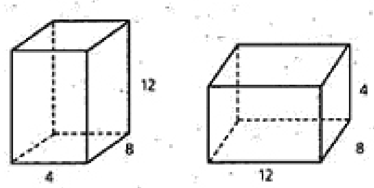
Mostrá cómo lo resolvés

4+8+12 = 24cm. la altura que alcan=
=za el agua es de 24cm.

Otros alumnos operan con todos los números del enunciado (8,38%)

EJEMPLO 39

1. Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

4cm . 8cm . 12cm
32cm . 12cm
384 cm : 9cm
42

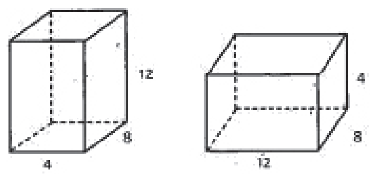
No queda claro en este procedimiento qué representa para él cada paso que propone en este razonamiento o por qué elige multiplicar primero y dividir en segundo lugar. Es interesante notar que por razones que desconocemos, considera solo la parte entera del cociente de 384 : 9.

Además, el modo en que aparecen las unidades en la escritura sugiere que han sido agregados a posteriori de la realización de los cálculos, quizás porque reconoce que en la comunidad matemática a la que pertenece, la presencia de unidades en problemas de medida es requerida.

En el ejemplo que sigue, el contexto parece ser un factor que condiciona las respuestas, dando lugar a la aparición de argumentos como “el agua se sale”, “el agua se expande”, etc.

EJEMPLO 40

1 Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

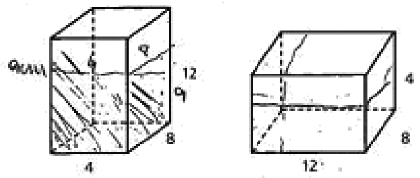
Si el agua se pone en el cubo que esta sobre la cara mas pequeña, el agua se sale, pero si se pone sobre la cara mas grande el agua quedo a la altura de 3cm.

12cm
- 9cm
$\boxed{3cm}$

En el siguiente ejemplo, se arriba a un resultado correcto siguiendo un procedimiento incorrecto.

EJEMPLO 41

1 Un prisma recto de 4 cm por 8 cm por 12 cm, se apoya sobre su cara más pequeña y se lo llena con agua hasta 9cm. Si luego el recipiente se apoya sobre su cara más grande, ¿qué altura alcanza el agua?



Mostrá cómo lo resolvés

V = a.b.c	
V = 4cm . 8cm . 12cm	
V = 384 cm²	96cm² : 4 = 24cm : 8 3cm
V = a.b.c	Rta: el agua alcanza una
V = 4.8.9	altura de 3cm.
V = 288cm²	
V = 384cm²	
V = 288cm²	
96cm²	

Calcula inicialmente el volumen del prisma y el del agua. Luego, resta ambos valores y obtiene el volumen sin llenar con agua en el primer prisma. A este resultado se lo divide por 4 y por 8, lo cual permite arribar al resultado 3 cm, que es el que se da como respuesta.

Si bien no sabemos de qué manera pensó este alumno, podemos analizar que en algunos casos, respuestas como ésta podrían explicarse al considerar el que este tipo de actividades tal vez no se correspondan con las que se presentan usualmente para el estudio de contenidos asociados al volumen de cuerpos.

Los alumnos saben que deben usar las fórmulas, e intentan ajustar los pasos del procedimiento para que el resultado sea un valor razonable. En este caso, por ejemplo, el estudiante pudo haber anticipado, a partir de su representación sobre el dibujo, que el resultado debía ser un valor menor que 4.

Problemas de perímetro y área

Hemos analizado algunas resoluciones de situaciones problemáticas que involucran el cálculo del área de distintas figuras geométricas, y se han presentado errores reiterados que nos interesa señalar. Los alumnos:

- confunden las nociones de área y perímetro, siendo este un error que se repite en los dos niveles evaluados;
- tienen dificultades para utilizar unidades de medida.

No debemos interpretar la presencia de errores como ausencia de conocimiento por parte de los alumnos, sino como un modo particular de conocer en un determinado momento y lugar, en relación con una situación dada. La diferenciación entre perímetro y área no es algo que los alumnos aprendan de manera espontánea a partir de que el profesor comunique de manera declarativa esta diferencia.

La escuela debe hacerse cargo de enseñar esta diferenciación a partir del trabajo matemático sobre actividades diseñadas a tal fin. Del mismo modo, la comprensión de cuál es el tipo de unidad de medida adecuada para medir una determinada magnitud, así como el modo de medirla, es responsabilidad de la enseñanza.

Las siguientes actividades se presentan para discutir algunos aspectos que podrían enfocarse en el estudio de estas cuestiones. Es necesario aclarar que no constituyen una secuencia y será necesario realizar un análisis detallado para decidir cuáles son los conocimientos necesarios para resolverlas, y si pueden utilizarse en una clase determinada.

Actividad I

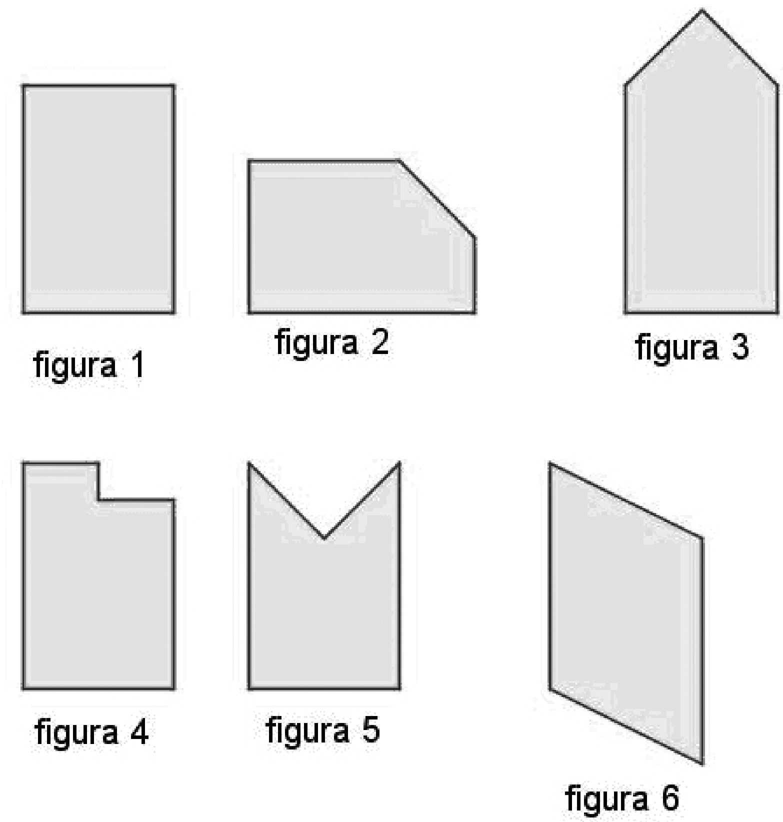
La siguiente actividad pone en juego la relación entre perímetro y área. Tiene por objetivo que los alumnos, a partir de las distintas figuras sin realizar ningún cálculo, ni medir con instrumentos geométricos, puedan establecer relaciones entre las figuras para analizar cómo varían área y perímetro cuando estas se modifican.

Situaciones como esta, apuntan a que los alumnos comprendan la diferencia entre el perímetro y el área de las figuras geométricas, centrando la atención en aspectos que podrían quedar invisibilizados si el foco estuviera puesto en lo numérico ya sea en el cálculo o en la graduación del instrumento.

A) Dadas las siguientes figuras, indicá, sin usar la regla para medir, si hay una figura que:

- tenga mayor perímetro que otra
- tenga igual perímetro que otra
- tenga menor perímetro que otra
- tenga mayor área que otra
- tenga igual área que otra
- tenga menor área que otra

En todos los casos justificá tu respuesta.



B) Escribí lo que pensaste y luego compará tus respuestas con las de tus compañeros.

Una primera cuestión para analizar, en relación a la puesta en aula de esta actividad, es si las figuras se van a presentar construidas en papel cuadriculado o en papel liso. Estas variantes habilitan prácticas diferentes.

Por ejemplo, si se presentan en papel cuadriculado, los alumnos podrían contar cuadraditos para medir. En cambio, al proponer fondo liso, serán ellos quienes deberán elegir qué trazos agregarán a las figuras para comparar unas con otras. Ambas variantes son interesantes aunque diferentes. El profesor podría evaluar si presenta primero una y luego la otra, o si trabaja directamente con fondo liso.

Es importante advertir que se ha limitado el uso de la regla para medir, con el objetivo de centrar la actividad en aspectos geométricos y no en aspectos numéricos. La regla sí podría habilitarse para realizar trazos sobre las figuras. De este modo, se estaría utilizando una regla no graduada.

Por supuesto, los trazos también podrían realizarlos sin el uso de la regla, ya que no interesa en este problema la prolijidad o la precisión de los dibujos. La intención es que las líneas que los alumnos agreguen sean maneras de operar sobre las figuras, de representar sus ideas, que luego podrán ser discutidas con el resto de la clase.

Las figuras que se proponen para comparar no son cualesquiera. Todas son, de alguna manera, variaciones del rectángulo 1. Por ejemplo, la figura 2 es el mismo rectángulo al que se le ha "cortado" una de sus puntas, y además se presenta con otra orientación.

Estas modificaciones permiten que, por un lado los alumnos deban centrarse en características que van más allá de lo visual es más alto, es más bajo, y les exija una actividad geométrica de comparación, "si completás esta punta, te queda el mismo rectángulo pero acostado"; "si le cortás esta punta, es como este otro, pero parado".

Estamos admitiendo que en las primeras interacciones con las figuras, el lenguaje pueda "relajarse" para poder construir una primera formulación de las ideas. En un momento posterior, podría trabajarse para formalizarlas un poco más.

Los alumnos podrían analizar que el perímetro de la figura 3 es mayor que el del rectángulo de la figura 1 ya que los dos lados que forman la punta son más largos que el lado del rectángulo 1.

Dependiendo de los conocimientos disponibles de los alumnos, se podrá profundizar en el análisis de maneras de estar seguros, sin usar la regla, de que esta afirmación es verdadera por ejemplo, utilizando un compás; apelando a la propiedad de la desigualdad triangular; abatiendo "a ojo" los segmentos sobre el lado del rectángulo; etc. En este caso, el área de la figura 3 también es mayor que el área de la figura 1, ya que al rectángulo que se tenía se le agrega un triángulo, y por lo tanto, la superficie total aumenta.

También podrán estudiar que el área del rectángulo de la figura 1 es igual al área del paralelogramo de la figura 6. Una manera de analizar esta cuestión es a través del trazado de segmentos horizontales que definan un rectángulo interior al paralelogramo, para luego operar sobre los triángulos de los extremos, "si cortara este y lo juntara con este otro, se forma el rectángulo 1". En este caso, a pesar de que el área permanece igual, el perímetro cambia, siendo mayor el del paralelogramo que el del rectángulo.

Al comparar esta situación y la anterior permite comenzar a advertir que es posible que las magnitudes no cambien de la misma manera, oponiéndose a una idea que suele instalarse, de que si el perímetro aumenta, también aumenta el área y viceversa.

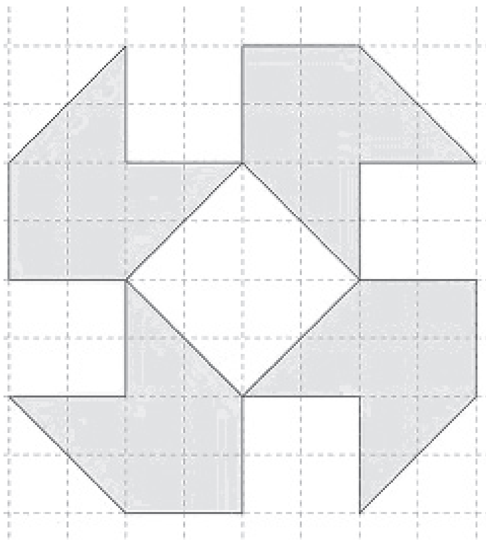
La comparación entre la figura1 y la figura 4 permite analizar que el área puede disminuir, como en la figura 4, y permanecer constante el perímetro.
Para generar avances en todos los alumnos sobre la diferenciación entre perímetro y área a partir del análisis de la independencia en sus variaciones, el docente deberá gestionar la actividad propiciando la exploración geométrica, la elaboración de conjeturas, la producción de argumentos, haciendo circular las estrategias que aparezcan y favoreciendo discusiones en torno a ellas.

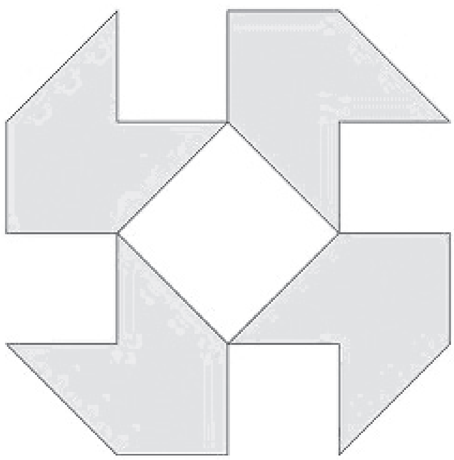
Asimismo, será importante que las cuestiones que se han discutido se pongan en relación con algunas de las ideas que el docente ha querido trabajar. La posibilidad de que las ideas producidas a partir de la actividad sean posteriormente sistematizadas y organizadas, permite que permanezcan disponibles para que todos puedan volver sobre ellas en otras instancias, cuando por ejemplo deban resolver otros problemas.

Actividad 2

La actividad que se propone a continuación apunta a favorecer el trabajo de análisis de relaciones entre figuras geométricas contenidas en el dibujo, por ejemplo, que cada parte sombreada puede descomponerse en un cuadrado y dos triángulos rectángulos; que juntando dos triángulos se forma un cuadrado; etc.

Copiá el siguiente dibujo utilizando regla no graduada.





A los ojos de muchos docentes, el copiado de figuras parece una tarea sencilla y mecánica. En general, esta perspectiva se sustenta en la idea de que *"el alumno puede "ver" en la figura lo mismo que el docente "ve"* o lo que el docente quiere que vea. Pero lo que cada uno de ellos "*ve*" está totalmente condicionado por los conocimientos disponibles que hacen posible "*ver*"."[9] .

Las actividades de copiado exigen a los alumnos identificar en el modelo a copiar características y relaciones que, para quien no dispone de todos los conocimientos matemáticos de los que sí disponen los profesores, no son visibles de manera inmediata. Con estas afirmaciones, decidimos *"poner en cuestión el punto de vista según el cual la representación de un objeto geométrico permite "ver" todas las propiedades que caracterizan dicho objeto"*[10] .

La figura se propone en un fondo cuadriculado, con el objetivo de que los alumnos tengan referencias para llevar a cabo el copiado. Si bien la figura está formada por las partes sombreadas del dibujo, los "*huecos*" entre ellas podrían ser útiles para que los alumnos comiencen a trabajar. Por ejemplo, algunos podrían comenzar delimitando el cuadrado central, o también el cuadrado que contiene a toda la figura. Los modos de copiar las partes sombreadas podrían apoyarse en su descomposición en figuras que no están marcadas, triángulos, cuadrados, o en el hecho de tomar de referencia los "*huecos*" cuadrados que quedan determinados.

Esta actividad podría presentarse también en papel con fondo liso. En este caso se habilitará el uso de la regla graduada. Los alumnos serán quienes deban agregar líneas auxiliares que les permitan interpretar las relaciones entre distintas figuras que puedan encontrar en el dibujo, de modo de facilitar su traslado para la copia.

Otra variante de la actividad podría presentarse si se pide a los alumnos que copien el dibujo pero en un tamaño mayor o menor, por ejemplo, *"Copien este dibujo en papel cuadriculado de tal manera que los cuadrados que tienen lado 4 ahora tengan lado 6"*. En este caso, no será posible realizar el dibujo copiando trazo por trazo. En cambio, es necesario copiar las relaciones entre las diferentes partes del dibujo.
Validar el trabajo en esta situación va a exigir a los alumnos que se centren en mostrar que las relaciones entre las partes del dibujo original son las mismas que las relaciones entre las partes de la copia.

9 Crippa, A. (coord.) (2006): Introducción al Diseño curricular. Matemática. ES1. Serie "Documentos para capacitación semipresencial. Educación Secundaria 1° Año (7° ESB)". Provincia de Buenos Aires.
10 Sadovsky, P.; Parra, C.; Itzcovich, H.; Broitman, C. (1998): Matemática. Documento de trabajo N° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Dirección de Curricula. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Una actividad como ésta puede ponerse en relación, a su vez, con situaciones como las que hemos presentado en las evaluaciones, en las que se requiere averiguar el área de la parte sombreada. La posibilidad de estudiar esta cuestión en un marco geométrico, sin centrarlo de entrada en el uso de fórmulas sino en las relaciones entre las partes de la figura, colabora en la mejor comprensión de la noción de área.
Se podría analizar con los alumnos la posibilidad de "juntar" dos triángulos para formar un cuadrado de 16 cuadraditos, y determinar el área total por sumas o restas.

Actividad 3

La siguiente actividad pone el foco en la cuestión de cómo ubicar las figuras que se proponen para lograr perímetros diferentes y aún iguales, mientras el área permanece invariante.

Se dan dos rectángulos cuyas medidas son 10 cm de largo por 6 cm de ancho, y otro de 5cm por 2cm

El dibujo no está en escala

A) Dibujen la figura de mayor perímetro que pueda formar uniendo un lado completo de una de las figuras con uno de los lados de la otra.

B) Dibujen la figura de menor perímetro que puedan formar uniendo un lado completo de una de las figuras con uno de los lados de la otra. Sin superponer las dos figuras.

C) Dibujen la figura de mayor área que puedan formar uniendo los dos rectángulos, sin superponerlos.

D) Intercambien las soluciones. ¿Todos encontraron las mismas formas de unir las figuras para lograr lo pedido en A, B y C?

Es usual que en las prácticas de enseñanza habituales se propongan problemas con solución única. Este problema, en cambio, admite más de una solución. No se trata entonces de "descubrir" la solución (única) sino de explorar diferentes configuraciones para analizar cuáles de ellas cumplen las condiciones del problema. Será interesante proponer instancias colectivas de análisis de las respuestas, en las que se discuta acerca de esta diversidad de posibilidades.

Se trata aquí de discutir que en todas las propuestas, necesariamente el área va a permanecer invariante mientras que el perímetro puede cambiar. Esta cuestión no es evidente para los alumnos. Aún aquellos que pueden enunciar la idea de que "con las mismas figuras puestas en distinta posición se obtiene una figura de perímetro diferente", no han advertido necesariamente la relación con la equivalencia de áreas.

Estas cuestiones deberán ser vinculadas de manera explícita, lo cual puede hacerse a partir de la discusión de esta actividad.

LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Durante mucho tiempo, la enseñanza de las funciones se asoció a la manipulación de representaciones, con propuestas que usualmente brindaban como dato una expresión algebraica que debía ser graficada a través de la construcción de tablas de valores. En este "pasaje", la fórmula era el punto de partida, la tabla un recurso intermedio y la gráfica, un fin en sí mismo. Más adelante, se intentó eliminar el paso por la tabla de valores.

En cualquiera de sus variantes, este tipo de propuesta pierde de vista que todos estos modos de representación intentan dar cuenta de diferentes aspectos de un mismo objeto matemático: la función que está en juego. Todas son igualmente valiosas para estudiar aspectos diferentes de un mismo objeto o fenómeno. Es tarea de la enseñanza proponer situaciones en las que el uso de una u otra se muestre más propicia.

Otro aspecto importante en el estudio de funciones tiene que ver con la articulación entre estos diferentes modos de representarlas. Es posible que, aun cuando un alumno no presente problemas en la manipulación algebraica o en el paso de la fórmula al gráfico, sí encuentre dificultades en tareas que exigen la interpretación de información que brinda una u otra representación, para ponerlas en diálogo, o para elegir la más adecuada según el problema que se quiere resolver.

El estudio de las funciones implica el trabajo a lo largo de muchos años de la escolaridad, en torno a aspectos que sin ser específicamente parte del "tema", se pueden vincular con él. Tomemos como ejemplo, la idea de proporcionalidad que se comienza a estudiar en la escuela primaria. Sabemos que esta idea reaparecerá en un contexto funcional en la escuela secundaria. ¿Cómo aprovechar los conocimientos que los alumnos han construido sobre estas cuestiones? ¿Cuáles son las diferencias que exigirán las nuevas propuestas?

Este "rastreo" de los conocimientos disponibles de los alumnos para abordar nuevas situaciones y estudiar nuevos objetos matemáticos, es imprescindible si partimos de una idea de aprendizaje en la que los nuevos conocimientos se construyen en vínculo con los "viejos" ya sea porque se oponen a ellos o porque se relacionan, ampliándolos.

Este trabajo de vinculación entre los contenidos relacionados con los que se quieren abordar, y los conocimientos "viejos" en relación con los nuevos, exige que no perdamos de vista que todas estas son relaciones que los alumnos no pueden abordar solos, sino que debe formar parte de un recorrido planificado por la enseñanza.

Ilustramos esta cuestión a partir del ejemplo particular de proporcionalidad, sobre el cual Itzcovich y Grimaldi (2013) afirman *"pasar de tratar con tablas de valores que admiten una colección finita de números y magnitudes a considerar la proporcionalidad como una relación funcional requiere un arduo trabajo: revisar las formas de representación, tratar con colecciones infinitas, asumir la linealidad, todos aspectos que no son posibles de ser abordados por los alumnos contando solo con las propiedades que se pusieron en funcionamiento en la Escuela Primaria. Esta articulación exige tender puentes entre aquellas tablas de proporcionalidad directa y el estudio de procesos que varían de manera proporcional, su crecimiento uniforme, la diversidad de representaciones que admite, la noción de variable, etc. Creemos que no son relaciones que los alumnos puedan identificar por sí mismos, exigen un recorrido pensado desde la enseñanza".*

Existen muchos aspectos que forman parte de las cuestiones centrales a ser abordadas para el estudio de las funciones, y que pueden quedar invisibilizados por el protagonismo que se le asigna usualmente a la manipulación algebraica; por ejemplo, las nociones de variación y dependencia. Es imprescindible, a la vez que interesante, realizar una lectura de los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios[11] , Ciclo Orientado de Educación Secundaria, Matemática. Creemos que esta lectura permitirá a los docentes ampliar la perspectiva para la elaboración y gestión de propuestas de enseñanza.

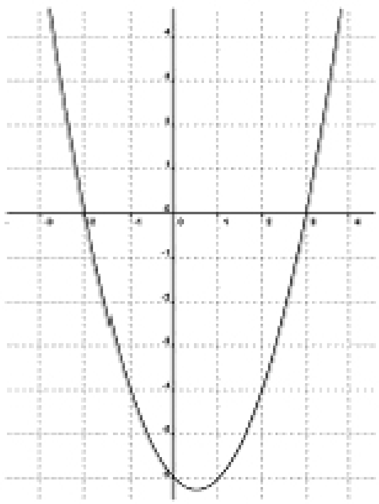
11 *http://www.me.gov.ar/consejo/resoluciones/res12/180-12_07.pdf*

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS

Dentro de la diversidad de contenidos vinculados a las funciones que se trabaja en la escuela, se ha decidido evaluar a los alumnos de 5°/6° año en relación a la función cuadrática.

Los alumnos que finalizaban la Educación Secundaria tuvieron que resolver actividades que tienen que ver con Funciones lineales y cuadráticas, sus propiedades y sus distintas representaciones.
Vamos a considerar una de las actividades cuyo contenido es Función cuadrática.

1 En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

Año:
5°/6° año de Educación Secundaria
Contenido:
Funciones
Capacidad Cognitiva:
Resolución de problemas
Desempeño:
Resolver un problema en el que tiene que decidir sobre la veracidad de una afirmación, dando razones que justifiquen su argumento.

El problema muestra el gráfico de una parábola y la expresión algebraica de una función cuadrática. El alumno debe decidir si esa fórmula corresponde o no al gráfico y justificar su respuesta.

Para ello cuenta con varios recursos. Uno de ellos es calcular las raíces de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ para lo cual podría recurrir a la fórmula de resolución que le fue dada en la hoja de fórmulas. Al resolverla, encontrará que las raíces son $x_1=3$ y $x_2 = -2$. Sin embargo, esto no es suficiente para decidir, ya que existen otras funciones con esas mismas raíces.

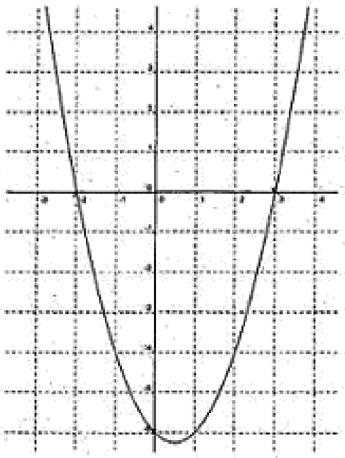
Se hace necesario un elemento más; por ejemplo, la ordenada al origen, que podría reconocer a partir del gráfico, la expresión algebraica o calculando el valor de y cuando x = 0. También podría tomar como referencia el vértice de la parábola, que podría calcular a partir de la expresión algebraica o del gráfico.

Hubo un 37,20% de alumnos que omitió responder la actividad. Dentro de los que lo resolvieron el 6,10% lo hizo correctamente y con procedimientos variados.

Veamos qué hicieron los alumnos

EJEMPLO 42

1 En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

SI. $x_1 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_1 = 3$; $x_1 = -2$ ceror

La ordenada al origen es -6

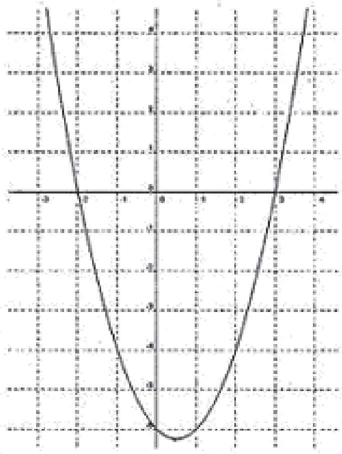
$y = x^2 - x - 6$

x	y
1	-6
2	-4
3	0
-1	-4
-2	0
-3	6

La anterior es una resolución correcta que recurre al cálculo algebraico de las raíces y, al reconocimiento de la ordenada al origen, aunque no sabemos qué representación utilizó para ello. Agrega además una tabla de valores que pudo haber tenido la función de verificar lo que identificó de otra manera.

EJEMPLO 43

1. En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

$V_{(x)} = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{25}{4}$

$\frac{-b \pm \sqrt{b-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-4.1.-6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} =$

$X_1 = 3 \qquad X_2 = -2$

$f(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0 \qquad f(-2) = -2^2 + 2 - 6 = 0$

Si estoy de acuerdo con Juan ese grafico corresponde al de una parabola cuyo PV es igual al conjunto $(\frac{1}{2} ; \frac{25}{4})$ cuya ordenada es -6 y sus raices son $(3;0)$ $(-2;0)$

Es interesante analizar la respuesta de este alumno. Calcula las coordenadas del vértice y luego las raíces. A continuación verifica si los valores hallados son realmente las raíces, reemplazando por los valores en la expresión algebraica y obteniendo los ceros. Luego da su respuesta.

Este alumno, a diferencia del anterior, calcula las coordenadas del vértice utilizando una fórmula específica, y luego calcula las raíces también a partir del uso de una expresión algebraica. A continuación, reemplaza los valores hallados en la expresión de la función y obtiene cero en ambos casos.

Es posible interpretar esta práctica como una verificación de lo que ha calculado a partir de la fórmula. Sin embargo, no sabemos si lo ha hecho con esta intención. Es posible también que el uso de la fórmula de resolución para el cálculo de raíces esté instalado como una práctica algorítmica, "si quiero saber las raíces, debo usar la fórmula de resolución", sin reconocer que esto permite anticipar que la ordenada correspondiente será cero. En este sentido, la exhaustividad en los cálculos podría estar reflejando esta ausencia de anticipación.

Vemos además una marca que ha hecho sobre la expresión algebraica dada en el enunciado, identificando sobre este registro el valor de la ordenada al origen.

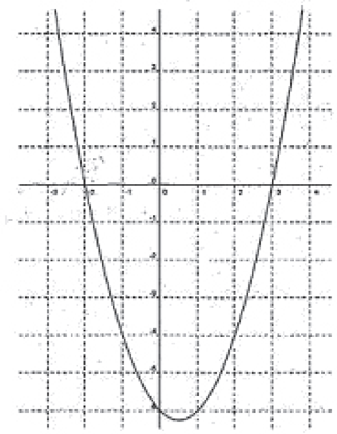
Resulta interesante comparar los modos de escribir las raíces que proponen los alumnos de estos dos ejemplos que hemos analizado. En el primer caso, se brindan solamente los valores de la abscisa, quizás asumiendo los valores de la ordenada. En el segundo caso, las raíces se representan a través de un par ordenado que, por ejemplo, brinda información acerca de la ubicación de estos elementos en el gráfico. Ambas representaciones pueden ser válidas. Nos detenemos en esta observación para subrayar la diferencia en la información que "deja a la vista"[12] una u otra.

Analicemos una respuesta que hemos clasificado como **parcialmente correcta** (18,03%). Estas respuestas son incompletas o dejan a la vista que hubo un intento de iniciar un camino correcto, pero con algún error.

12 El uso de comillas intenta enfatizar la idea de que la escritura en sí misma no deja a la vista las propiedades que nombramos, sino que nos permite identificarlas.

EJEMPLO 44

1 En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

Si estoy de acuerdo por que...

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

$= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm 5}{2}$

$\frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

$\frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = \boxed{-2}$

las raices si coinciden con el calculo.

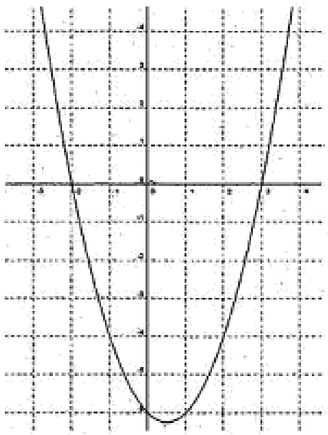
Muchos fueron los alumnos del último año de la Educación Secundaria que optaron por soluciones de este tipo. En este caso, se calculan las raíces a partir de la aplicación de la fórmula de resolución. El dato que brinda este cálculo es necesario pero no suficiente, ya que hay infinitas funciones cuadráticas que tienen esos mismos ceros recordemos que cualquier función g (x) = k . f (x), con k $\in \mathbb{R}$ tendrá los mismos ceros que f (x).

Si los alumnos no han trabajado con actividades que cuestionen la suficiencia de las raíces para “atrapar” a una función de este tipo, es probable que no adviertan esta cuestión. Es necesario proponer desde la enseñanza actividades que favorezcan la discusión en torno a este punto.

Otros alumnos dieron **respuestas incorrectas** (75,87%). En esta categoría, incluimos a las del tipo "no sé", "no lo entiendo", y también a las que no proporcionan justificación correcta y completa.

EJEMPLO 45

1 En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

No estoy de acuerdo. Porque este problema es muy complicado y nunca nos dieron algo como esto ~~..~~ por lo tanto no estoy de acuerdo

"No estoy de acuerdo. Porque este problema es muy complicado y nunca nos dieron algo como esto. Por lo tanto no estoy de acuerdo"

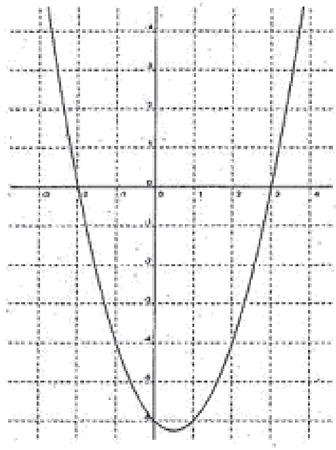
Es interesante la respuesta de este alumno que declara: "…nunca nos dieron algo como esto". Es muy probable que así sea. Pero además, en esta respuesta se puede interpretar que este alumno no está habituado a la producción matemática, es decir, a que se le propongan situaciones en las que debe buscar entre sus conocimientos disponibles, herramientas para elaborar un procedimiento de resolución personal.

En clases como ésta, la actividad transcurre en torno a la diversidad de resoluciones que aparecen frente a una situación, a su análisis, validación, su puesta en relación con otros procedimientos diferentes, su vinculación con nuevos conocimientos.

Otros alumnos muestran la imposibilidad de dar argumentos que justifiquen su respuesta, sea correcta o incorrecta y se limitan a escribir "Si" o "No" o solamente a destacarlos en el texto dado.

EJEMPLO 46

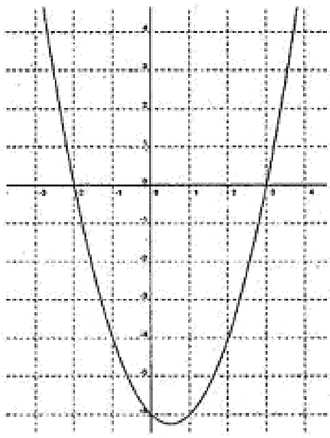
1. En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

EJEMPLO 47

1 En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

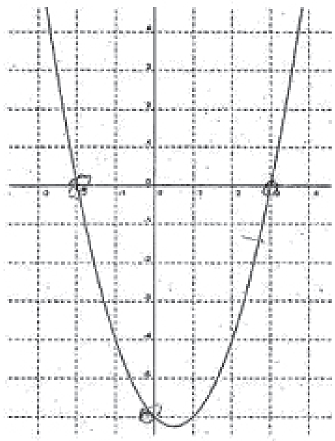
Si estoy de acuerdo con lo que dice Juan

Es interesante reflexionar sobre la escasa presencia de actividades que se proponen para que los alumnos aprendan a argumentar, justificar, dar razones. Si bien todos los profesores esperamos que nuestros estudiantes utilicen estas prácticas matemáticas, es menos frecuente que incluyamos instancias de enseñanza sobre estas cuestiones, debido, quizás, a la naturalización que tenemos en torno a ellas.

Otros alumnos intentan una justificación incorrecta para su respuesta.

EJEMPLO 48

1 En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

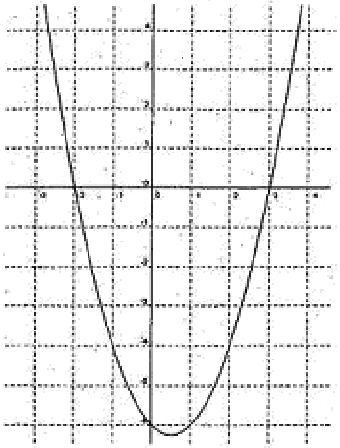
NO porque tendria que ser entonces que donde termino la parabola ete en el punto -6

Rta: "No porque tendría que ser entonces que donde termina la parábola esté en el punto -6"

Una posible lectura de la respuesta de este alumno es que interpreta que el -6 de la expresión algebraica indica la "altura" del "eje y" en la que se encontrará el vértice. Es posible que las situaciones más significativas que ha resuelto lo hayan llevado a construir esta idea, por ejemplo, si las funciones cuadráticas con las que ha trabajado han tenido el vértice siempre sobre el eje de ordenadas.

EJEMPLO 49

1 En un libro de matemática, Juan encontró este gráfico:



Juan dice que este gráfico corresponde a la función $y = x^2 - x - 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan?
Respondé SI o NO y explicá por qué.

NO, PORQUE A PESAR QUE LA RAICES SON LAS MISMA EN LA FUNCION EL COEFICIENTE PRINCIPAL ES POSITIVO ENTON- CES LA PARABOLA HACIA ABAJO, ES DECIR, DE FORMA INVERSA A LA QUE ESTA GRAFICADA.

Este alumno declara inicialmente que las raíces son las mismas. No hay elementos en el registro escrito que nos permitan saber a partir de qué ideas ha construido esta respuesta.

A continuación afirma que, dado que el coeficiente principal es positivo, la parábola debería tener las ramas hacia abajo. Es interesante notar que este alumno es capaz de "leer" el coeficiente principal en la expresión algebraica y también sabe que el signo que porte tiene un correlato sobre el registro gráfico. Su respuesta está construida dentro de esta red de relaciones, pero falla porque recuerda erróneamente este indicador. No hay en la respuesta de este alumno ningún signo de dudas sobre lo que declara, y no presenta ningún procedimiento que valide su afirmación.

Vale la pena reflexionar sobre la necesidad de proponer desde la enseñanza situaciones que apunten a la validación de los procedimientos que se proponen. En palabras de Crespo Crespo (2005): *"desde edades tempranas, es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear* *hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, aunque sin exigencia de formalización. A nivel de aprendizaje, la forma de razonar puede tener tanto interés como los propios contenidos conceptuales, porque el razonamiento es en sí mismo un gran contenido a aprender."* [13]

Cuando queremos que el alumno dé sus argumentos en realidad le estamos pidiendo que muestre el carácter de verdad de una afirmación, es decir, situaciones que requieran justificar o validar el carácter de veracidad de un enunciado. *"(…) si considera que los alumnos pueden "hacer matemática", la demostración como contenido matemático adquirirá un perfil de elemento dinámico y modificable desde el punto de vista didáctico pudiendo adaptarse a la situación escolar presentada. En este último caso, se realizarán continuamente argumentaciones matemáticas diversas, las que conducirán a que los alumnos se enfoquen en explicar, verificar, comunicar, sistematizar y descubrir."* [14]

Es necesario que en su paso por la escuela secundaria los alumnos desarrollen capacidades que les permitan usar los conocimientos adquiridos para resolver situaciones nuevas, pudiendo defender con argumentos su resolución.

Se espera que los alumnos al finalizar la Educación Secundaria puedan argumentar usando propiedades. Para ello, la escuela debe ofrecerles actividades variadas que no respondan solamente a representaciones estereotipadas, y espacios favorables para el aprendizaje de los modos propios de trabajo de esta disciplina.

13 *Crespo Crespo, C. (2005): "La importancia de la argumentación en el aula". En Revista Premisa N° 7, Vol. 24..*
14 *Crespo Crespo,C., Op. Cit..*

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Bronzina, L, Chemello, G, Agrasar, M, (2009) "Aportes para la enseñanza de la matemática", Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), LLECE, UNESCO.

Crespo Crespo, C. (2005): "La importancia de la argumentación en el aula". En Revista Premisa N° 7, Vol. 24

Crippa, A. (coord.) (2006): Introducción al Diseño curricular. Matemática. ES1. Serie "Documentos para capacitación semipresencial. Educación Secundaria 1° Año (7° ESB)". Provincia de Buenos Aires.

Grimaldi, V , Itzcovich, H, (2013) "Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática", en Broitman, C (comp.), Matemáticas en la escuela primaria II, Buenos Aires, Paidós.

Itzcovich,H y Broitman,C, (2001) "Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la Geometría en EGB", Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Pcia de Buenos Aires.

Itzcovich,H, (2005) "Iniciación al estudio didáctico de la geometría, de las construcciones a las demostraciones", Libros del Zorzal.

Sadovsky, P.; Parra, C.; Itzcovich, H.; Broitman, C. (1998): Matemática. Documento de trabajo N° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Dirección de Curricula. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Criterios de Evaluación ONE 2013 http://diniece.me.gov.ar/content/view/8/27/lang,es_AR/. (consultado en mayo de 2014)

Núcleos de Aprendizaje Prioritarios, Ciclo Orientado de Educación Secundaria, Matemática
http://www.me.gov.ar/consejo/resoluciones/res12/180-12_07.pdf. (consultado en mayo de 2014)

ANEXO

GRILLA DE CORRECCIÓN DE LOS ÍTEMS ABIERTOS DEL CENSO ONE 2013 DE MATEMÁTICA ÚLTIMO AÑO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Modelo 1 ítem 1 Grado/año: 5° Y 6° año de Educación Secundaria Contenido: GEOMETRÍA Y MEDIDA Capacidad cognitiva: Resolución de problemas Desempeño: Resolver problemas que requieran calcular el área de la figura indicando los procedimientos utilizados Dificultad estimada: Media Guía de corrección	
Respuesta correcta	Respuesta correcta: **9 cm², ó 9** y procedimiento correcto **31** Resuelve la situación mediante un procedimiento que le permite juntar las tres partes sombreadas y formar ¼ del cuadrado. *Ejemplo 1:* *Observa que puede juntar las tres partes sombreadas y juntas forman un cuarto del total de la figura.* *Lado del cuadrado es 6 cm:* *Área del cuadrado= 62* *Área del cuadrado= 36* *Área de la zona sombreada= 36 : 4* *Área de la zona sombreada= 9* *Ejemplo 2: Responde 9* *y muestra algunos cálculos y otros los realiza mentalmente.* **32** Resuelve calculando las áreas parciales y sumando. Área de la parte inferior izquierda del cuadrado = 1,935 cm^2 Área de la parte de corona circular mayor = 5,29875 cm^2 Área de ¼ del círculo menor= 1,76625 cm^2 La suma = 9 cm^2 Nota: Si el alumno redondea a dos decimales los valores parciales va a obtener un valor próximo a 9. Considerarlo correcto. 33 Resuelve por otros procedimientos correctos.
Respuesta parcialmente correcta	**21** Resuelve con un procedimiento correcto y completo con errores de cálculos. *Ejemplos 1:* *Lado del cuadrado es 3 cm:* *Área del cuadrado= 32* *Área del cuadrado= 9* *Área de la zona sombreada=9 : 4* *Área de la zona sombreada= 2,25* *Ejemplo 2:* *Lado del cuadrado es 6 cm:* *Área del cuadrado= 62* *Área del cuadrado= 12* *Área de la zona sombreada= 12 : 4* *Área de la zona sombreada= 3*

Respuesta parcialmente correctas	**22** Muestra un procedimiento basado en la suma de las áreas sombreadas pero le falta calcular una o dos de ellas. *Lado del cuadrado es 6 cm:* *Área del cuadrado= 62* *Área del cuadrado= 36* *Área de la zona sombreada= 36*
	23 Respuesta correcta sin mostrar el procedimiento ni escribirlo. **24** Describe que la figura sombreada es ¼ del total pero no hace el cálculo, no obtiene respuesta numérica o la respuesta numérica es equivocada.
Respuesta parcialmente incorrectas	**11**. Considera las tres partes pintadas como un tercio del cuadrado Lado del cuadrado es 6 cm: Área del cuadrado= 62 Área del cuadrado= 36 Área de la zona sombreada= 36 : 3 Área de la zona sombreada= 12 **12** Calcula solo una de las áreas sombreadas **13**. Calcula usando la fórmula de la longitud de la circunferencia. **15** Respuesta correcta con procedimiento incorrecto. *Ejemplo:* *Lado del cuadrado es 6 cm:* *Área del cuadrado= 62* *Área del cuadrado= 12* *Área de la zona sombreada= 12 : 4* *Área de la zona sombreada= 9* **16**. Otras respuestas incorrectas. **17**. Respuestas tachadas, borradas, dibujos o expresiones no pertinentes con la tarea propuesta *Ejemplo:* *“No me interesa resolver la prueba”* *18. Respuesta: “No lo vimos”, “No lo sé”, “No lo entiendo”*
Respuesta omitida	**99**. Respuesta en blanco
Respuesta ilegible	**77**. Pregunta mal impresa o ilegible

ARGENTINA
NOS INCLUYE

DiNIECE Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa